

Remez アルゴリズムによる直交ウェーブレットフィルタバンクの設計

張 熙[†] 吉川 敏則[†]

Design of Orthonormal Wavelet Filter Banks Using Remez Exchange Algorithm

Xi ZHANG[†] and Toshinori YOSHIKAWA[†]

あらまし 本論文では、Remez アルゴリズムを用いた直交ウェーブレットフィルタバンクの新しい設計法を提案する。直交ウェーブレット基底はパラユニタリフィルタバンクから導出できることがよく知られている。従って、直交ウェーブレット基底の構成問題はパラユニタリフィルタバンクの設計問題になる。ウェーブレット関数の正規直交条件とレギュラリティ条件から、FIR フィルタバンクが満たすべき条件を導き、そのフィルタ係数と零点との関係を明らかにする。次に、これらの関係に基づき、直接 z 領域に Remez アルゴリズムを適用し、フィルタの設計問題を線形問題として定式化する。簡単な線形方程式を解くことで、フィルタ係数が容易に求められ、これを繰り返して反復計算すれば、任意のレギュラリティを有する FIR フィルタバンクが設計できる。本設計法では、必要な計算量が従来法に比べて少なくなることが特長である。

キーワード 直交ウェーブレット、パラユニタリフィルタバンク、Remez アルゴリズム、FIR フィルタ

1. ま え が き

ウェーブレット変換は最初に Morlet が人工地震を用いた石油探査法の解析道具として導入された。その後、Daubechies によりコンパクトサポートされたウェーブレット関数と完全再構成フィルタバンクとの関係が示されてから、急に注目を集め、盛んに研究が行われてきた [1]~[11]。ウェーブレット変換は、時間と周波数領域の同時解析が可能であると共に、多重解像度空間において信号を処理できるため、さまざまな分野で広く応用されている。周知のように、ウェーブレット変換はフィルタバンクを用いて実現することができる。また、それとは逆に完全再構成フィルタバンクを設計して基本ウェーブレット関数を導出することもできる [1]~[5]。本論文では、後者について議論する。パラユニタリフィルタバンクを設計して直交ウェーブレット基底を構成する方法はこれまでに幾つか提案され、その設計問題は基本的にハーフバンドフィルタの設計に帰着される [2], [6]~[11]。しかし、文献 [2], [6], [8] と [9] では、最大平たんフィルタと等

リプルフィルタの設計しか述べられていない。一方、文献 [7], [10] と [11] では、任意のレギュラリティをもつ FIR フィルタバンクの設計法が提案されている。文献 [10] と [11] は逐次射影法を用いて最適近似を行っているが、計算量がフィルタ次数の増加につれて多くなる問題点がある。この二つの方法に比べて、効率的な設計法は文献 [7] の Remez アルゴリズムを用いた方法である。Remez アルゴリズムは FIR 直線位相フィルタの設計問題においてもっとも有名で、それに基づく McClellan-Parks の設計法は効率的であり、幅広く使われている。しかし、パラユニタリフィルタバンクの設計では、フィルタの伝達関数に正規直交条件とレギュラリティ条件が課されたため、Remez アルゴリズムをそのまま適用することができない。そこで、文献 [7] では、Remez アルゴリズムを適用できるよう、まず正規直交条件とレギュラリティ条件を満たす伝達関数に変数変換を施し、次に、変数変換後の領域に Remez アルゴリズムを用いて最適近似を行う。得られた設計結果から逆変換してフィルタ係数を求めているが、変数変換と逆変換という煩わしい操作が必要となる。

本論文では、直接 z 領域に Remez アルゴリズムを適用して任意のレギュラリティを有する直交ウェーブ

[†] 長岡技術科学大学工学部電気系、長岡市
Department of Electrical Engineering, Nagaoka University of
Technology, Nagaoka-shi, 940-21 Japan

レットフィルタバンクの新しい設計法を提案する。まず、ウェーブレット関数の正規直交条件とレギュラリティ条件から、FIR パラユニタリフィルタバンクが満たすべき条件を導き、そのフィルタ係数と零点との関係を調べる。次に、これらの関係を利用して、直接阻止域に Remez アルゴリズムを適用し、フィルタバンクの設計問題を線形問題として定式化する。簡単な線形方程式を解くことで、フィルタ係数が容易に決定できる。更に等リプルな振幅特性が得られるまで繰り返して反復計算を行い、最適なフィルタ係数を求める。本設計法では、レギュラリティ条件を任意に指定することができる。また、Remez アルゴリズムを直接 z 領域に適用できたため、文献[7]のような変数変換と逆変換の操作が必要なくなり、従来法に比べて計算量が少なくなる。2. で、直交ウェーブレット関数とパラユニタリフィルタバンクの関係を述べ、3. では、直交ウェーブレットフィルタバンクの設計法を与える。最後に、例題を設計し、本設計法の有効性を示す。

2. 直交ウェーブレットとパラユニタリフィルタバンク

基本ウェーブレット関数を $\psi(t)$ とすると、信号 $f(t)$ ($f \in L^2(\mathbf{R})$) に対するウェーブレット変換は

$$F_w(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \quad (1)$$

のように定義される。ここで、 x^* は x の複素共役を意味する。ゲイレーションとシフトのパラメータは $a \in \mathbf{R}^+$, $b \in \mathbf{R}$ であり、離散化する場合、一般に $a = 2^{-k}$, $b = 2^{-k}m$ (k, m : 整数) である。

周知のように、図 1 に示されるパラユニタリフィルタバンク $\{H(z), G(z)\}$ からウェーブレット関数を導出することができる。その中で、 $H(z)$ は低域フィルタであり、 $G(z)$ は高域フィルタである。スケーリング関数 $\phi(t)$ とウェーブレット関数 $\psi(t)$ は、図 2 に示されるように、低域フィルタ $H(z)$ の出力端に同様な操作を無限回に繰り返せば得られる。ここで、 $\phi(t)$ と $\psi(t)$ のフーリエ変換を $\hat{\phi}(\omega)$, $\hat{\psi}(\omega)$ と仮定すると、周波数領域において、スケーリング関数とウェーブレット関数とパラユニタリフィルタバンク $\{H(z), G(z)\}$ の関係はそれぞれ

$$\hat{\phi}(\omega) = H(e^{j\frac{\omega}{2}}) \hat{\phi} \left(\frac{\omega}{2} \right) = \prod_{k=1}^{\infty} H(e^{j2^{-k}\omega}) \quad (2)$$

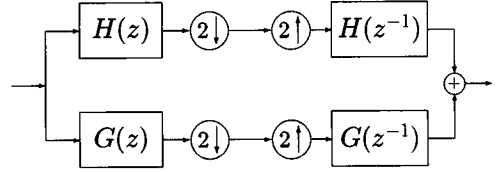


図 1 パラユニタリフィルタバンク (非因果)
Fig.1 Paraunitary filter bank (noncausal).

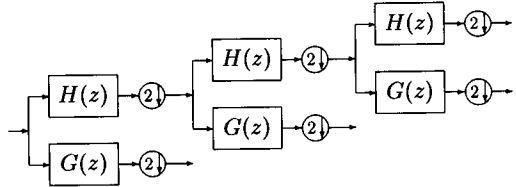


図 2 マルチステージフィルタバンク
Fig.2 Multiple stage filter bank.

$$\hat{\psi}(\omega) = G(e^{j\frac{\omega}{2}}) \hat{\phi} \left(\frac{\omega}{2} \right) \quad (3)$$

で表される。ウェーブレット関数の正規直交条件から、フィルタバンクは

$$\begin{cases} H(z)H(z^{-1}) + H(-z)H(-z^{-1}) = 1 \\ G(z)G(z^{-1}) + G(-z)G(-z^{-1}) = 1 \\ H(z)G(z^{-1}) + H(-z)G(-z^{-1}) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

の条件を満たさなければならない。ここで、

$$P(z) = H(z)H(z^{-1}) \quad (5)$$

を積フィルタと定義する。式 (4) の条件を満たすには、

$$P(z) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^N c_{2n+1} [z^{2n+1} + z^{-(2n+1)}] \quad (6)$$

でなければならない。ここで、係数 c_n は実数である。式 (6) からわかるように、 $P(z)$ はハーフバンドフィルタであり、その次数は $4N+2$ である。 $P(z)$ が対称なフィルタ係数をもつため、その零点は単位円に対する鏡像零点かあるいは単位円上の零点になる。もし単位円上の零点がすべて 2 重零点になれば、鏡像零点と単位円上の 2 重零点を分解して、式 (5) のように $H(z)$ を求めることができる。そのとき、 $H(z)$ の次数は $2N+1$ で、必ず奇数である。次に、

$$G(z) = \pm z^{-2N-1} H(-z^{-1}) \quad (7)$$

のように構成すれば、式 (4) が満たされ、得られた

ウェーブレット関数が正規直交となる。従って、パラユニタリフィルタバンクの設計問題は単位円上に2重零点をもつ式(6)の $P(z)$ の設計となる。

スケーリング関数 $\phi(t)$ とウェーブレット関数 $\psi(t)$ が無限回の繰り返しの後、連続的な関数に収束する、あるいは連続的な導関数をもつ条件をレギュラリティ条件という。パラユニタリフィルタバンクに対しては、その十分条件として、 $H(z)$ が $z=-1$ に少なくとも一つの零点をもつことである。 $H(z)$ が $z=-1$ に L 個の多重零点を有するとき、

$$\left. \frac{d^i H(e^{j\omega})}{d\omega^i} \right|_{\omega=\pi} = 0 \quad (i=0,1,\dots,L-1) \quad (8)$$

となり、

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^i \psi(t) dt = 0 \quad (i=0,1,\dots,L-1) \quad (9)$$

が得られる。すなわち、ウェーブレット関数は $L-1$ 次までのモーメントが零となる。これは実際の応用において非常に有用な性質である。次は零となるモーメントの次数が与えられた場合、最良周波数選択特性をもつ積フィルタ $P(z)$ の設計について考える。

3. 直交ウェーブレットフィルタバンクの設計

3.1 積フィルタの性質

積フィルタ $P(z)$ を設計するまえに、まず $P(z)$ の性質について調べる。式(6)からわかるように、 $P(z)$ はハーフバンドフィルタである。そのフィルタ係数は $c_0=0.5$ を除いて、偶数番目の係数がすべて零で、すなわち、

$$c_{2n}=0 \quad (n=\pm 1, \pm 2, \dots, \pm N) \quad (10)$$

である。 $P(z)$ は全部 $4N+2$ 個の零点をもつ。その中で、 $2N$ 個の零点は式(10)の時間域条件を満たすために使われ、残りの $2(N+1)$ 個の零点は独立零点である。従って、 $P(z)$ の設計問題は $2(N+1)$ 個の独立零点の配置問題である。式(6)から、 $P(z)$ の振幅特性は

$$P(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} + 2 \sum_{n=0}^N c_{2n+1} \cos(2n+1)\omega \quad (11)$$

である。よって、

$$P(e^{j\omega}) + P(e^{j(\pi-\omega)}) \equiv 1 \quad (12)$$

が得られる。つまり、 $P(z)$ は点 $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2})$ に関して奇対称な振幅特性を有している。よって、通過域 $[0, \omega_p]$ における振幅特性は阻止域 $[\omega_s, \pi]$ の振幅特性より決定され、阻止域のみを最適近似すれば、振幅特性の対称性より全体の特性が得られることがわかる。ここで、通過域端周波数 ω_p と阻止域端周波数 ω_s は $\omega_p + \omega_s = \pi$ の条件を満たすことが必要である。従って、 $P(z)$ の設計問題は $2(N+1)$ 個の独立零点を用いて阻止域の振幅特性を最適近似する問題となる。

3.2 最大平坦フィルタ

式(8)、(9)からわかるように、零となるモーメントの次数が最大になるために、フィルタ $H(z)$ の振幅特性に最大平坦の条件が課される。式(6)では、 $P(z)$ の独立零点は $2(N+1)$ 個である。よって、最大平坦の振幅特性を得るには、 $2(N+1)$ 個の独立零点がすべて $z=-1$ に存在する必要がある、 $P(z)$ は

$$P(z) = (1+z)^{N+1} (1+z^{-1})^{N+1} Q(z) \quad (13)$$

のようになる。ここで、 $Q(z)$ は $2N$ 次のFIR直線位相フィルタである。式(13)を展開して、その偶数番目の係数が式(10)の条件を満たすよう、 $Q(z)$ の係数を求めることができる。式(13)から、

$$\left. \frac{d^i P(e^{j\omega})}{d\omega^i} \right|_{\omega=\pi} = 0 \quad (i=0,1,\dots,2N+1) \quad (14)$$

となる。よって、

$$\left. \frac{d^i H(e^{j\omega})}{d\omega^i} \right|_{\omega=\pi} = 0 \quad (i=0,1,\dots,N) \quad (15)$$

が得られ、最大 N 次までのモーメントが零となることがわかる。式(11)の振幅特性を式(14)に代入すると、

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^N c_{2n+1} = \frac{1}{4} & (i=0) \\ \sum_{n=0}^N (2n+1)^{2i} c_{2n+1} = 0 & (i=1,\dots,N) \end{cases} \quad (16)$$

となり、この線形方程式を解いて、フィルタ係数 c_n が求められる。得られた $P(z)$ を式(5)のように分解して最大平坦フィルタ $H(z)$ を構成する。本論文では、その単位円上の零点と単位円内の零点を用いて、最小位相特性をもつ $H(z)$ を構成している。そして、式(7)のように $G(z)$ を構成した後、スケーリング関数 $\phi(t)$ とウェーブレット関数 $\psi(t)$ を導出して設計を終了する。

3.3 任意のレギュラリティを有するフィルタ

3.2 では、最大平坦フィルタの設計について述べたが、最大平坦フィルタの場合、その独立零点がすべて $z = -1$ に存在するため、 $\omega = 0$ と $\omega = \pi$ において最大の平坦度を有している。しかし、フィルタの周波数選択性はあまりよくない。信号処理の多くの応用では、フィルタの周波数選択性も非常に有用な性質であるが、フィルタの平坦性と周波数選択性は互いに矛盾している。つまり、最大平坦フィルタは最良周波数選択性が得られず、最良周波数選択性を有するフィルタは最大平坦特性をもたない。ここでは、ウェーブレット関数の $K-1$ 次までのモーメントが零となる条件が与えられた場合、つまり、 $H(z)$ が $z = -1$ に K 個の多重零点をもつとき、最良周波数選択性を有するフィルタの設計について考える。3.2 からわかるように、 K は必ず

$$0 \leq K \leq N+1 \quad (17)$$

である。式 (5) より、 $P(z)$ は $z = -1$ に $2K$ 個の多重零点をもつ。すなわち、

$$P(z) = (1+z)^K (1+z^{-1})^K Q(z) \quad (18)$$

である。ここで、 $Q(z)$ は $2(2N-K+1)$ 次の FIR 直線位相フィルタである。よって、

$$\left. \frac{d^i P(e^{j\omega})}{d\omega^i} \right|_{\omega=\pi} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, 2K-1) \quad (19)$$

となり、式 (16) と同様に、

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^N c_{2n+1} = \frac{1}{4} & (i=0) \\ \sum_{n=0}^N (2n+1)^{2i} c_{2n+1} = 0 & (i=1, \dots, K-1) \end{cases} \quad (20)$$

が得られる。 $P(z)$ は $2(N+1)$ 個の独立零点を有するので、 $z = -1$ の多重零点を除いて、残りの独立零点は $2(N-K+1)$ 個である。フィルタの振幅誤差を最小にするため、これらの残りの独立零点をすべて単位円上に配置する必要がある。 $z = \pm 1$ 以外の単位円上の零点が必ず複素共役対で存在することと、 $P(z)$ が式 (5) のように分解できるため、その単位円上の零点がすべて 2 重零点になることから、

$$2(N-K+1) = 4M \quad (21)$$

でなければならない。ここで、 M は整数である。よって、 N が奇数のとき、 K は偶数である。また、 N が偶数のとき、 K は奇数で、 $H(z)$ は $z = -1$ に少なくとも 1 個の零点を有する。 $P(z)$ の $4M$ 個の独立零点がすべて単位円上の 2 重零点となり、かつ振幅特性が等リプル特性になるよう、次に Remez アルゴリズムを用いて定式化を行う。

$P(z)$ の振幅特性の対称性より、フィルタの設計は阻止域 $[\omega_s, \pi]$ だけで振幅特性を近似すればよい。以下、阻止域にのみ Remez アルゴリズムを適用する。 $P(z)$ は z 平面の上半面の単位円上に ($z = -1$ を除く) $2M$ 個の零点をもつため、阻止域に $2M+1$ 個のサンプル周波数点 ω_i を設定することができる。すなわち、

$$\omega_s = \omega_0 < \omega_1 < \dots < \omega_{2M} \leq \pi \quad (22)$$

次に、単位円上の零点が 2 重零点になるよう、Remez アルゴリズムを用いて次式のように定式化する。

$$P(e^{j\omega_i}) = \begin{cases} \delta & (i = 0, 2, \dots, 2M) \\ 0 & (i = 1, 3, \dots, 2M-1) \end{cases} \quad (23)$$

ここで、 $\delta (> 0)$ は振幅誤差である。式 (11) の振幅特性を式 (23) に代入し、

$$\sum_{n=0}^N c_{2n+1} \cos(2n+1)\omega_i - \frac{1+(-1)^i}{4} \delta = -\frac{1}{4} \quad (24)$$

が得られる。式 (24) と式 (20) をまとめると、

$$\mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{B} \quad (25)$$

となる。ここで、 $\mathbf{B} = [-\frac{1}{4}, \dots, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, \dots, 0]^T$ 、 $\mathbf{C} = [c_1, c_3, \dots, c_{2N+1}, \delta]^T$ であり、 $\mathbf{A}$ の要素 A_{ij} は

$$A_{ij} = \begin{cases} \cos(2j+1)\omega_i & \begin{pmatrix} 0 \leq i \leq 2M \\ 0 \leq j \leq N \end{pmatrix} \\ (2j+1)^{2(i-2M-1)} & \begin{pmatrix} 2M+1 \leq i \leq N+1 \\ 0 \leq j \leq N \end{pmatrix} \\ -\frac{1}{2} & \begin{pmatrix} i = 0, 2, \dots, 2M \\ j = N+1 \end{pmatrix} \\ 0 & (\text{else}) \end{cases} \quad (26)$$

である。明らかに、式 (25) は簡単な線形方程式である。

$K + 2M + 1 = N + 2$ 個の方程式に対し、未知のパラメータ ($N + 1$ 個のフィルタ係数 c_n と 1 個の振幅誤差 δ を含む) の数も $N + 2$ であるので、式 (25) の線形方程式を解いて、フィルタ係数が唯一に決定できる。得られたフィルタ係数 c_n を用いて、阻止域において $P(z)$ の振幅特性を計算し、その極値周波数点 $\bar{\omega}_i$ を探す。この結果、最初にしたサンプル周波数点 ω_i は必ずしも振幅特性の極値周波数点 $\bar{\omega}_i$ と一致するとは限らない。得られた極値周波数点を次のサンプル周波数点として置き換え、再び式 (25) の線形方程式を解いてフィルタ係数 c_n を求める。サンプル周波数点 ω_i と極値周波数点 $\bar{\omega}_i$ が一致するまで、この過程を繰り返して反復計算を行う。極値周波数点に変化しなくなったら、等リプルの振幅特性を有する最適近似解が得られたとする。具体的な設計アルゴリズムは以下のように示される。

3.4 設計アルゴリズム

1. パラユニタリフィルタバンクの設計仕様 N , K とカットオフ周波数 ω_c を与える。
2. 式 (22) のように阻止域に $2M + 1$ 個のサンプル周波数点 ω_i の初期値を等間隔に設定する。
3. 式 (25) の線形方程式を解いて、フィルタ係数 c_n を求める。
4. 得られた c_n を用いて、阻止域において $P(z)$ の振幅特性を計算し、その極値周波数点 $\bar{\omega}_i$ を探す。
5. $\sum_{i=0}^{2M} |\bar{\omega}_i - \omega_i| < \epsilon$ を満たすならば、7. へ進む。満たさない場合は 6. へ進む。但し、 ϵ は与えられた収束許容値である。
6. $\omega_i = \bar{\omega}_i$ ($i = 0, 1, \dots, 2M$) として、3. へ戻る。
7. $P(z)$ の零点を分解して、式 (5) のように $H(z)$ を構成する。
8. 得られた $H(z)$ より、式 (7) のように $G(z)$ を構成し、スケーリング関数 $\phi(t)$ とウェーブレット関数 $\psi(t)$ を導出して終了する。

3.5 従来法との比較

ここでは、3.4 で提案した設計アルゴリズムを従来の設計法と計算量について比較する。任意のレギュラリティをもつ FIR パラユニタリフィルタバンクの設計問題においては、文献 [10] と [11] はウェーブレット関数の正規直交条件とレギュラリティ条件を考慮した上、逐次射影法を用いて振幅特性の最適近似を行っている。しかし、必要な計算量がフィルタ次数の増加につれて

多くなる問題点がある。この二つの方法に比べて、文献 [7] の設計法は Remez アルゴリズムを用いたため、明らかに効率的である。文献 [7] では、正規直交条件とレギュラリティ条件を含んだ伝達関数に Remez アルゴリズムを適用できるよう、まず変数変換を行い、次に変数変換後の領域に Remez アルゴリズムを用いて線形問題として定式化する。最後に、得られた設計結果から逆変換してフィルタ係数を求めている。一方、本論文では、まず積フィルタの性質、振幅特性と独立零点の関係などを調べた。次に、これらの関係を明らかにした時点で、レギュラリティ条件から式 (20) の線形方程式、直接阻止域に Remez アルゴリズムを適用することで式 (24) の線形方程式が得られ、フィルタバンクの設計問題を線形問題に帰着することができた。本設計法は文献 [7] と同様に簡単な線形方程式を解くことで、フィルタ係数が容易に求められる。また、直接 z 領域に Remez アルゴリズムを適用できたため、文献 [7] のような変数変換と逆変換の操作が必要なくなり、その分計算量が低減できる。3.4 の設計アルゴリズムでは、一つの反復過程において、主な計算量はステップ 3. の線形方程式とステップ 4. の振幅特性の計算で、文献 [7] も同じである。しかし、文献 [7] では、反復計算が収束した後、フィルタ係数を計算するために逆変換を行わなければならない。その操作はステップ 3. と同じ大きさの線形方程式を解くことである。また、設計の前に設計仕様の変換等を考慮して、必要な計算量はほぼ反復計算の 1 回分と同じである。実際の設計では、本設計法は 3~5 回の繰り返しでほとんど収束する。仮に文献 [7] の設計法も同じ回数で収束するとすれば、その変数変換と逆変換の操作は余分な 1 回に相当する。従って、本設計法は従来法に比べて必要な計算量が少なくなることがわかる。

4. 設 計 例

[設計例 1] { 最大平坦フィルタ }

フィルタの設計仕様は $N = 10$ で、 $P(z)$ の次数は 42 次である。式 (16) の線形方程式を解いて、得られた $P(z)$ のフィルタ係数 c_n を表 1 に示す。このフィルタ係数から、 $P(z)$ の零点を計算して最小位相特性を有する最大平坦フィルタ $H(z)$ を構成した。そのとき、 $H(z)$ の次数は 21 次で、その振幅特性を図 3 に実線で示す。また、図 3 では、 $N = 8$ と $N = 12$ のときの振幅特性も合わせて示されている。図 3 から明らかに、 N が大きくなるにつれ、フィルタの振幅特性

表 1 設計例 1 のフィルタ係数
Table 1 Filter coefficients of Example 1.

c_1	0.3111590153	c_{13}	0.0004060484
c_3	-0.0864317979	c_{15}	-0.0000781986
c_5	0.0359014212	c_{17}	0.0000108942
c_7	-0.0146530546	c_{19}	-0.0000009747
c_9	0.0053182605	c_{21}	0.0000000420
c_{11}	-0.0016316557		

表 2 設計例 2 のフィルタ係数
Table 2 Filter coefficients of Example 2.

c_1	0.3156246210	c_{13}	0.0057576230
c_3	-0.0986920702	c_{15}	-0.0026337401
c_5	0.0524614950	c_{17}	0.0008764902
c_7	-0.0309334931	c_{19}	-0.0001801141
c_9	0.0182834505	c_{21}	0.0000168605
c_{11}	-0.0105811514		

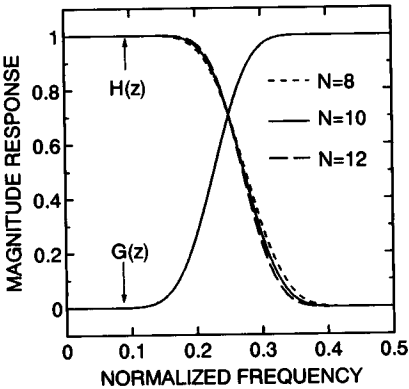


図 3 設計例 1 の振幅特性
Fig. 3 Magnitude responses of Example 1.

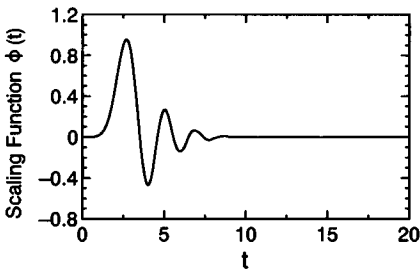


図 4 設計例 1 のスケーリング関数
Fig. 4 Scaling function of Example 1.

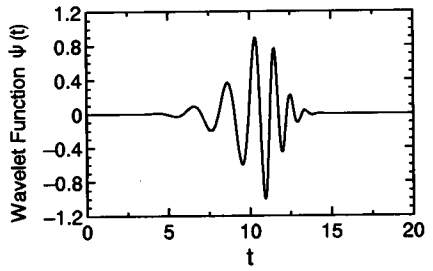


図 5 設計例 1 のウェーブレット関数
Fig. 5 Wavelet function of Example 1.

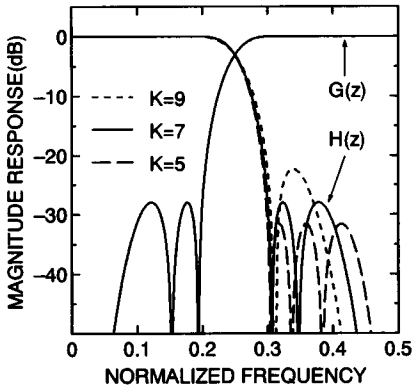


図 6 設計例 2 の振幅特性
Fig. 6 Magnitude responses of Example 2.

の平坦度が増している。 $N = 10$ のときの $H(z)$ から、式 (7) のように $G(z)$ を構成し、その振幅特性を図 3 に示す。このフィルタバンクから導出したスケーリング関数 $\phi(t)$ とウェーブレット関数 $\psi(t)$ はそれぞれ図 4 と図 5 に示されている。

〔設計例 2〕 { 任意のレギュラリティを有するフィルタ }

フィルタの設計仕様は $N = 10$, $K = 7$, $\omega_s = 0.6\pi$ である。提案した方法を用いて設計を行った。得られた $P(z)$ のフィルタ係数 c_n を表 2 に示す。 $P(z)$ から最小位相特性を有する $H(z)$ を構成し、その振幅特性を図 6 に実線で示す。また、 $K = 5$ と $K = 9$ のフィ

ルタも設計した。それぞれの振幅特性は図 6 に示されている。図 6 からわかるように、 $K = 9$ のフィルタは阻止域に一つのリップルをもっているに対し、 $K = 7$ と $K = 5$ のフィルタはそれぞれ二つと三つのリップルを有している。よって、 K が小さくなるにつれ、フィルタの振幅誤差も小さくなる。また、 $K = 7$ のとき、式 (7) より $G(z)$ を構成し、その振幅特性を図 6 に示す。 $H(z)$ と $G(z)$ の振幅特性から、パラユニタリフィルタバンクが得られていることがわかる。このフィルタバンクからスケーリング関数 $\phi(t)$ とウェーブレット関数 $\psi(t)$ を導出し、それぞれ図 7 と図 8 に示す。この例題において、必要な反復回数は 3~5 回であった。

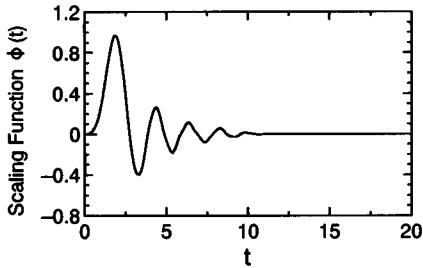


図7 設計例2のスケーリング関数
Fig.7 Scaling function of Example 2.

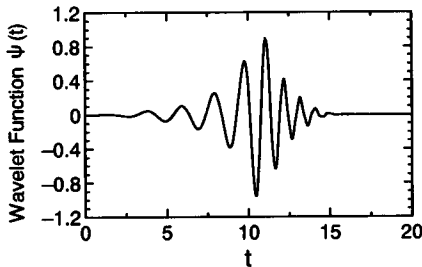


図8 設計例2のウェーブレット関数
Fig.8 Wavelet function of Example 2.

5. む す び

本論文では、直接 z 領域に Remez アルゴリズムを適用して、任意のレギュラリティを有する直交ウェーブレットフィルタバンクの新しい設計法を提案した。ウェーブレット関数の正規直交条件とレギュラリティ条件から、FIR パラユニタリフィルタバンクが満たすべき条件を導き、そのフィルタ係数と零点との関係を明らかにした。これらの関係に基づき、直接阻止域に Remez アルゴリズムを用いて、フィルタバンクの設計問題を線形問題として定式化した。簡単な線形方程式を解くことで、フィルタ係数が容易に決定でき、更に振幅特性が等リプル特性になるまで繰り返して反復計算を行い、最適なフィルタ係数を求めた。本設計法では、ウェーブレット関数のレギュラリティ条件を任意に指定することができ、かつ従来法に比べて計算量が少なくなることが特長である。

謝辞 日ごろ御指導頂く、電気通信大学電子情報学
科教授岩倉博先生に深謝致します。

文 献

- [1] C.K. Chui (著), 桜井 明, 新井 勉 (訳), ウェーブレット入門, 東京電機大学出版社, 1993.
- [2] P.P. Vaidyanathan, Multirate Systems and Filter Banks,

Englewood Cliffs, NJ:Prentice Hall, 1993.

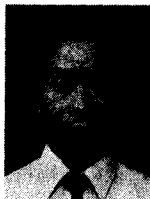
- [3] M. Vetterli and C. Herley, "Wavelets and filter banks: theory and design," IEEE Trans. Signal Processing, vol.40, no.9, pp.2207-2232, Sept. 1992.
- [4] C. Herley and M. Vetterli, "Wavelets and recursive filter banks," IEEE Trans. Signal Processing, vol.41, no.8, pp.2536-2566, Aug. 1993.
- [5] O. Rioul, "A discrete-time multiresolution theory," IEEE Trans. Signal Processing, vol.41, no.8, pp.2591-2606, Aug. 1993.
- [6] 尾知 博, U.Iyer, M.Nayeri, "IIR フィルタに基づく直交ウェーブレット基底の一設計法," 信学論 (A), vol.J77-A, no.8, pp.1096-1099, Aug. 1994.
- [7] O.Rioul and P.Duhamel, "A Remez exchange algorithm for orthonormal wavelets," IEEE Trans. Circuits & Syst.-II, vol.41, no.8, pp.550-560, Aug. 1994.
- [8] 安岡寛道, 池原雅章, 磯部広幸, "再帰形直交ウェーブレット関数," 信学論 (A), vol.J77-A, no.9, pp.1231-1240, Sept. 1994.
- [9] B.Belzer, J.M.Lina, and J.Villasenor, "Complex, linear-phase filters for efficient image coding," IEEE Trans. Signal Processing, vol.43, no.10, pp.2425-2427, Oct. 1995.
- [10] S.Schweid and T.K.Sarkar, "Projection minimization techniques for orthogonal QMF filters with vanishing moments," IEEE Trans. Circuits & Syst.-II, vol.42, no.11, pp.694-701, Nov. 1995.
- [11] J.C.Pesquet and P.L.Combettes, "Wavelet synthesis by alternating projections," IEEE Trans. Signal Processing, vol.44, no.3, pp.728-731, March 1996.
- [12] 張 熙, 岩倉 博, "Remez アルゴリズムによる FIR ナイキストフィルタの設計," 信学論 (A), vol.J79-A, no.8, pp.1378-1384, Aug. 1996.

(平成9年2月5日受付, 4月7日再受付)



張 熙 (正員)

1984 中国南京航空航天大学電子工程系
卒。1993 電気通信大学大学院博士課程了。
工博。1984 南京航空航天大学助手。1993 電
気通信大学助手。現在、長岡技術科学大学
助教授。1987 年度中国国家科学技術進歩三
等賞受賞。ディジタル信号処理, 近似理論,
ウェーブレット等の研究に従事。IEEE 会員。



吉川 敏則 (正員)

昭46 東工大・電子卒。昭51 同大学院
博士課程了。工博。埼玉大工学部助手, 同
大講師を経て, 昭58 より長岡技術科学大
学助教授。現在, 同大教授。ディジタル信
号処理, コンピュータのソフトウェア応用
等の研究に従事。IEEE 会員。