研究速報

FIRディジタルフィルタのパワースペクトルモーメントの定義とその特性

吉川　敏則† (正員)　　金　永洛† (学生員)
張　熙† (正員)

Definition of Power Spectral Moments and Their Properties for FIR Digital Filters

Toshinori YOSHIKAWA†, *Member*, Young Lak KIM†, *Student Member*, and Xi ZHANG†, *Member*

† 長岡技術科学大学電気系，長岡市
Faculty of Engineering, Nagaoka University of Technology, Nagaoka-shi, 940-2188 Japan

あらまし　ディジタルフィルタにおける特性劣化の評価尺度として，時間域での波形モーメントが定義され，フィルタに対するいろいろな特性が報告されている．本論文では周波数域において新たにパワースペクトルモーメントを定義し，FIR フィルタに対する特性について論じている．

キーワード　ディジタルフィルタ，パワースペクトルモーメント

1. まえがき

ディジタル信号処理では，入力信号，状態信号やフィルタの係数などが有限語長で表現される．この影響により，実際に構成されるフィルタの特性は劣化し，量子化誤差が生じる．特性劣化の解析や評価にはいろいろな評価尺度が用いられている．例えば，時間域の波形を用いた波形モーメント [1], [2]，周波数域での係数感度，根感度などが定義され，係数量子化による特性劣化の解析や評価に用いられている．近年，周波数域で特性劣化の評価尺度として，新たにスペクトルモーメント [3], [4] が提案され，フィルタの特性解析や応用について検討されている．

本論文では，周波数域でのスペクトルモーメントを拡張し，新たに，パワースペクトルモーメントを定義する．そして，フィルタの設計パラメータに対するパワースペクトルモーメントの特性について検討する．

2. パワースペクトルモーメントの定義

タップ数が N の FIR ディジタルフィルタの伝達関数は，フィルタ係数（インパルス応答）を $h(n)$ とすると次式で表される．

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n} \tag{1}$$

また，周波数特性は $H(e^{j\omega})$ となる．これから得られるスペクトルモーメントは複素数であるが，パワースペクトル $|H(e^{j\omega})|^2$ は実数値となる．このパワースペクトル $|H(e^{j\omega})|^2$ に重みとして周波数のべき乗 ω^r を掛けた積分値を，r 次パワースペクトルモーメントとして次式のように定義する．

$$P_r=\int_0^{\pi}\omega^r|H(e^{j\omega})|^2d\omega \tag{2}$$

なお，積分区間を $-\pi$ から π までにすると奇数次モーメントが零になるので，積分区間を 0 から π までとする．

3. パワースペクトルモーメントの一般式

インパルス応答の周波数特性を式 (1) から求めて，パワースペクトルモーメントの式 (2) に代入すると次式になる．

$$P_r=\int_0^{\pi}\omega^r\left(\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos n\omega\right)^2d\omega+\int_0^{\pi}\omega^r\left(\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin n\omega\right)^2d\omega \tag{3}$$

この式を展開すると

$$P_r=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}h(n)h(m)\int_0^{\pi}\omega^r\cos n\omega\cos m\omega d\omega+\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}h(n)h(m)\int_0^{\pi}\omega^r\sin n\omega\sin m\omega d\omega \tag{4}$$

となる．ここで，式 (4) は三角公式を用いて次式のように簡単化できる．

$$P_r=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}h(n)h(m)\int_0^{\pi}\omega^r\cos(n-m)\omega d\omega \tag{5}$$

1 次パワースペクトルモーメントの場合，

$$P_1=\frac{\pi^2}{2}\sum_{n=0}^{N-1}h(n)^2+\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{\substack{m=0\\ m\neq n}}^{N-1}\frac{(-1)^{n-m}-1}{(n-m)^2}h(n)h(m) \tag{6}$$

が得られる．同様にして 2 次パワースペクトルモーメ

ントの一般式は次式になる．

$$P_2 = \frac{\pi^3}{3}\sum_{n=0}^{N-1} h(n)^2 + 2\pi \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{\substack{m=0\\ m\neq n}}^{N-1} \frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)^2} h(n)h(m) \tag{7}$$

インパルス応答を用いた1次と2次のパワースペクトルモーメントの一般式は，フィルタ係数を用いて上式のように簡単な積和演算で表すことができる．

式(6)と式(7)からパワースペクトルモーメントは時間域の波形のエネルギーを含む第1項と残りの第2項との和で表せる．以下では，一般式の右辺の第1項と第2項の関係から，パワースペクトルモーメントの特性を検討する．

4. 次数に対する2次パワースペクトルモーメントの特性

遷移域（0.2～0.25）と重みは固定し，Remez Algorithmで設計した低域フィルタに対して，次数だけを変化させたとき，2次パワースペクトルモーメントの特性を図1に，2次パワースペクトルモーメントの一般式の第1項と第2項との関係を図2に示す．

2次パワースペクトルモーメントは次数の増加と共に理想フィルタに対するモーメント量に向かって単調増加する．そして，モーメントの一般式の第1項と第2項との相関がほぼ1次関数で近似できることから，2次パワースペクトルモーメントは第1項の時間域の波形のエネルギー成分だけで表すことができる．これは2次パワースペクトルモーメントが近似的に波形のエネルギーに比例することを意味する．例えば，遷移域（0.2～0.25）の場合，2次パワースペクトルモーメントは次式となる．

$$P_2 \approx \frac{\pi^3}{3}E - 4.78E - 1.56 \tag{8}$$

但し，$E = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)^2$

また，Parsevalの等式から

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)|^2 d\omega = \frac{P_0}{\pi} \tag{9}$$

となり，式(8)は次式のように表すことができる．

$$P_2 \approx \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\pi^3}{3} - 4.78\right\} P_0 - 1.56 \tag{10}$$

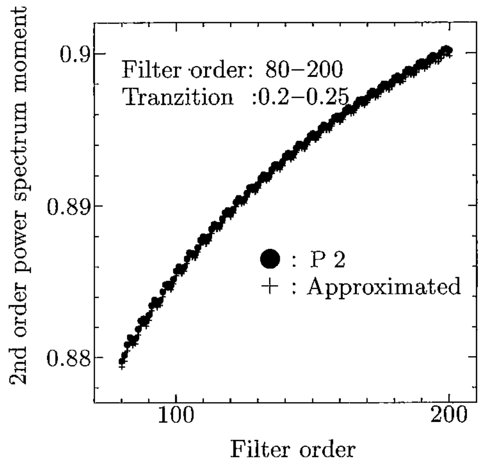

図1 次数に対する2次パワースペクトルモーメントの特性

Fig. 1 2nd order power spectrum moment vs. filter order.

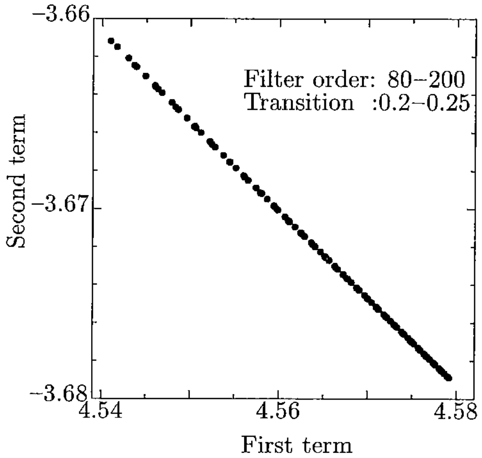

図2 次数に対する2次パワースペクトルモーメントの第1項と第2項との関係

Fig. 2 Relations between first and second terms for fiter order.

式(10)の右辺の計算結果を2次パワースペクトルの近似値として図1に示す．

5. 遷移域位置に対するパワースペクトルモーメントの特性

次数を200次，遷移域幅を0.01に固定して，Remez Algorithmで設計した低域フィルタに対して，通過域端周波数を0.05から0.45まで0.01の刻みで変化させたときの2次パワースペクトルモーメントの特性を図3に示す．

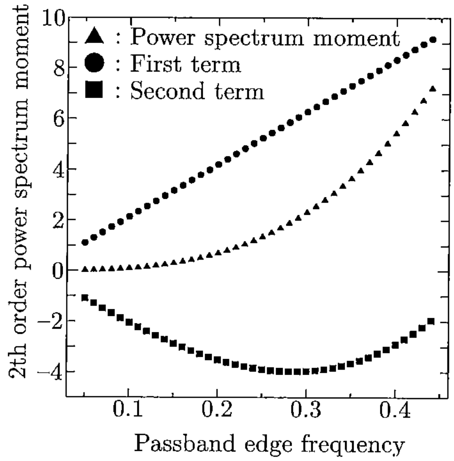

図 3　遷移域位置に対する 2 次パワースペクトルモーメントの特性

Fig. 3　2nd order power spectrum moment vs. passband edge.

遷移域の位置変化に対して 2 次パワースペクトルモーメントの一般式の第 1 項は直線で第 2 項は 2 次関数で近似できる．また，第 2 項の成分がパワースペクトルモーメントの変動に影響を与えていることがわかる．

6. む す び

ディジタルフィルタの特性劣化の評価尺度の一つとして，周波数域で新たにパワースペクトルモーメントを定義し，1 次と 2 次についてモーメントの一般式を求めた．そして，2 次に関して，求めた一般式が時間域の波形エネルギーを含む項と残りの項との和で表せることから二つの式の関係を検討した．フィルタ設計パラメータ，次数と遷移域位置の変化に対するパワースペクトルモーメントの特性を調べた結果，次数の増加と共にモーメント量は理想フィルタのモーメント量に向かって単調増加する．そして，遷移域位置の変化に対してのモーメントの変動は 2 次関数で近似できることと一般式の第 2 項がモーメントの変動に影響を与えていることがわかった．また，次数の変化に対してのパワースペクトルモーメントは波形のエネルギーに近似的に比例することを示した．特に，2 次パワースペクトルモーメントが波形エネルギーの簡単な式で近似できることから，係数量子化によるフィルタの特性劣化評価への適用が期待される．

今後の課題としては，さまざまなフィルタに対するパワースペクトルモーメントの特性解析や解析結果を用いた応用の検討が挙げられる．

文　献

[1] 吉川敏則，中越　新，“FIR ディジタルフィルタにおける波形モーメントの係数感度—構成法による比較，” 信学技報，CAS 80-59, Sept. 1980.

[2] 吉川敏則，木島　悟，“パワーモーメントの定義と信号処理への適用，” 信学技報，CAS 88-44, Aug. 1988.

[3] 吉川敏則，筒井幸彦，“スペクトルモーメントの定義と特性解析，” 信学技報，CAS 93-84, Nov. 1993.

[4] 道祖尾武，奥村　浩，吉川敏則，“拡張スペクトルモーメントを用いた FIR フィルタの最小係数語長の推定，” 信学会全国大会，A-210, March 1996.

（平成 9 年 12 月 8 日受付）