

ケプストラムモーメントを用いた縦続形 FIR フィルタの係数量子化効果の評価

吉川 敏則[†] (正員) 池田 高志[†] (学生員)

張 熙[†] (正員)

Estimation of Coefficient Quantization Effects for Cascade Form FIR Digital Filters Using Cepstral Moments

Toshinori YOSHIKAWA[†], Member, Takashi IKEDA[†], Student Member, and Xi ZHANG[†], Member

[†] 長岡技術科学大学電気系, 長岡市

Faculty of Engineering, Nagaoka University of Technology, Naogaoka-shi, 940-2188 Japan

あらまし デジタルフィルタ実現の際, その係数は有限語長に量子化される. 本論文では, 縦続形 FIR デジタルフィルタに着目し, 係数量子化による特性劣化の評価尺度として, ケプストラムモーメントを用い, 具体的な評価例を示した.

キーワード デジタルフィルタ, 係数量子化, 縦続形構成, ケプストラムモーメント

1. ま え が き

ケプストラム系列に対するモーメント量であるケプストラムモーメント [1] を用いて FIR デジタルフィルタの係数量子化による特性劣化量の推定法が報告されている [2]. この手法では, LPF や HPF について, 阻止域における特性劣化量は高い精度で推定できるが, 通過域における劣化量や他のフィルタについての検討はまだ不十分である. そこで, 本論文では, ある周波数に着目することで, 通過域における特性劣化量を推定できることを示す. また, BPF への適用は不可能とされていたが, 縦続形フィルタの場合, ケプストラムモーメントを用いて特性劣化量を推定できることを示す. 提案法は, 簡単な実数演算のみを用いるため, 少ない演算量で推定が可能である.

2. ケプストラムモーメント

2.1 一般式

r 次ケプストラムモーメント $\hat{m}_r$ は次式で定義される.

$$\hat{m}_r = \sum_{n=0}^{\infty} n^r \hat{h}[n] \quad (1)$$

ここで, $\hat{h}[n]$ はケプストラム系列であり, 信号系列 $h[n]$ の周波数特性 $H(e^{j\omega})$ の対数を逆フーリエ変換した系列である. 信号系列が実数ならばケプストラム系列も実数となる. 以下にケプストラム系列の周波数特

性 $\hat{H}(e^{j\omega})$ と $H(e^{j\omega}), \hat{h}[n]$ の関係を示す.

$$\hat{H}(e^{j\omega}) = \log[H(e^{j\omega})] \quad (2)$$

$$\hat{H}(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{h}[n] e^{-j\omega n} \quad (3)$$

次に, ケプストラムモーメントと系列の周波数特性との関係を示す.

$$\hat{m}_r = j^r \frac{\partial^r}{\partial \omega^r} \hat{H}(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=0} \quad (4)$$

また, ケプストラムモーメントは波形モーメントを用いて次のように表せる.

$$\hat{m}_0 = \log[m_0] \quad (5)$$

$$\hat{m}_r = \frac{m_r}{m_0} - \sum_{i=1}^{r-1} {}_{r-1}C_i \frac{m_i}{m_0} \hat{m}_{r-i} \quad (6)$$

但し, $m_0 > 0$ とする. ここで, ${}_{r-1}C_i$ は組み合わせの数, m_r は次式で定義される r 次波形モーメントである.

$$m_r = \sum_{n=0}^{\infty} n^r h[n] \quad (7)$$

一般にケプストラム系列は無限長となるが, FIR フィルタのような有限系列信号の場合, 式 (5), (6) を用いることにより, ケプストラムモーメントを正確に計算できる. このように, ケプストラムモーメントは波形モーメントを介して, 実数演算のみで求めることができる.

2.2 零点とケプストラムモーメント

ケプストラムモーメントは零点を用いても表現できる. N 次縦続形 FIR デジタルフィルタの周波数特性 $H(e^{j\omega})$ は, $h[0]$ をスケーリング係数, Z_i を零点とすると次式で表せる.

$$H(e^{j\omega}) = h[0] \prod_{i=1}^N (1 - Z_i e^{-j\omega}) \quad (8)$$

式 (8) を式 (4) に代入することにより, ケプストラムモーメントと零点の関係が直接的に得られる. 以下に低次の場合の関係を示す.

$$\hat{m}_1 = - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i}{1 - Z_i} \quad (9)$$

$$\hat{m}_2 = - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i}{(1 - Z_i)^2} \quad (10)$$

但し、 $Z_i \neq 1$ とする。上式は各項が零点のみで表されるので、縦続形フィルタの場合、各段のケプストラムモーメントの総和がフィルタ全体のケプストラムモーメントに等しくなることを意味する。

3. 周波数特性劣化量の推定

3.1 係数量子化効果

直線位相で実現可能な最低次数で各段が構成される縦続形直線位相 FIR デジタルフィルタを想定する。フィルタが K 段で構成されているとすると、式 (8) の周波数特性は次式のように表される。

$$H(e^{j\omega}) = h[0] \prod_{k=1}^K H_k(e^{j\omega}) \quad (11)$$

ここで、 $H_k(e^{j\omega})$ は k 段目の周波数特性である。同様に、係数量子化後のフィルタ全体の周波数特性、 k 段目の周波数特性をそれぞれ、 $H'(e^{j\omega})$ 、 $H'_k(e^{j\omega})$ とすると、次式となる。

$$H'(e^{j\omega}) = h[0] \prod_{k=1}^K H'_k(e^{j\omega}) \quad (12)$$

また、量子化による周波数特性劣化量をそれぞれ、 $\Delta H(e^{j\omega})$ 、 $\Delta H_k(e^{j\omega})$ とすると、 $H'(e^{j\omega})$ 、 $H'_k(e^{j\omega})$ は次式で表せる。

$$H'(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) + \Delta H(e^{j\omega}) \quad (13)$$

$$H'_k(e^{j\omega}) = H_k(e^{j\omega}) + \Delta H_k(e^{j\omega}) \quad (14)$$

式 (14) を式 (12) に代入すると次式を得る。

$$H'(e^{j\omega}) = h[0] \prod_{k=1}^K \{H_k(e^{j\omega}) + \Delta H_k(e^{j\omega})\} \quad (15)$$

ここで、 $|\Delta H_k(e^{j\omega})| \ll 1$ とすると、フィルタ全体の周波数特性劣化量は、式 (13) から次式のように近似できる。

$$\Delta H(e^{j\omega}) \approx h[0] \sum_{k=1}^K \Delta H_k(e^{j\omega}) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^K H_i(e^{j\omega}) \quad (16)$$

また、ケプストラムモーメントは次数により、その特徴が明確に区別される。偶数次のケプストラムモーメントが振幅特性、奇数次のケプストラムモーメントが位相特性に関する特徴量をそれぞれ表している [2]。直線位相フィルタでは、奇数次ケプストラムモーメントはフィルタ次数にのみ依存し、係数量子化による影

響を受けない。従って、ここでは、振幅特性を表す偶数次で、演算量の少ない 2 次ケプストラムモーメントを用いる。

フィルタの各零点が係数量子化により ΔZ_i だけ移動したとすると、2 次ケプストラムモーメント変動量は、式 (10) を用いて、次式のように求められる。

$$\begin{aligned} \Delta \hat{m}_2 &\approx \sum_{i=1}^N \frac{\partial \hat{m}_2}{\partial Z_i} \Delta Z_i \\ &= - \sum_{i=1}^N \frac{1 + Z_i}{(1 - Z_i)^3} \Delta Z_i \end{aligned} \quad (17)$$

3.2 ケプストラムモーメントによる推定

各零点の偏角 ω_i を零点周波数とする。単位円上に存在する零点に対応する周波数に着目すると、 $H_i(e^{j\omega_i}) = 0$ なので、式 (16) は着目した段の劣化量のみに関係し、その他の段の劣化量は考慮する必要がない。このとき、零点 $Z_i = e^{j\omega_i}$ 、 Z_i^* が係数量子化により、それぞれ、 ΔZ_i 、 ΔZ_i^* だけ移動したとすると、周波数特性劣化量は次式で表せる。

$$\begin{aligned} |\Delta H(e^{j\omega_i})| &\approx |h[0]| |\Delta H_i(e^{j\omega_i})| \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^K |H_k(e^{j\omega_i})| \\ &\approx 2|h[0]| \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^K |H_k(e^{j\omega_i})| |\sin \omega_i| |\Delta Z_i| \end{aligned} \quad (18)$$

また、2 次ケプストラムモーメント変動量は、式 (17) より、次式となる。

$$|\Delta \hat{m}_{2i}| = \frac{|\cos(\omega_i/2)|}{2|\sin^3(\omega_i/2)|} |\Delta Z_i| \quad (19)$$

これらは、どちらも $|\Delta Z_i|$ の関数なので、周波数特性劣化量に関する以下の式が得られる。

$$|\Delta H(e^{j\omega_i})| \approx C(\omega_i) |\Delta \hat{m}_{2i}| \quad (20)$$

ここで、 $C(\omega_i)$ は次式で表される補正係数である。

$$C(\omega_i) = 4|h[0]| |\sin \omega_i| \frac{|\sin^3(\omega_i/2)|}{|\cos(\omega_i/2)|} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^K |H_k(e^{j\omega_i})| \quad (21)$$

式 (20) より、ケプストラムモーメント変動量に補正係数を乗じることで、特性劣化量を推定できる。

3.3 実軸上の周波数特性劣化量

ケプストラムモーメントを用いた推定法では、単位円上以外に存在する零点に関する検討が十分ではない。例えば LPF では、阻止域における特性劣化量は推定できるが、通過域における劣化量の推定はまだ不十分である。そこで、 z 平面で実軸上に相当する周波数 $\omega = 0, \pi$ に着目した。これらの周波数における各縦続段の周波数特性は、各段のフィルタ係数 $h_k[n]$ より、次式のように求められる。

$$H_k(e^{j0}) = H_k(1) = \sum_{n=0}^{N_k} h_k[n] \quad (22)$$

$$H_k(e^{j\pi}) = H_k(-1) = \sum_{n=0}^{N_k} (-1)^n h_k[n] \quad (23)$$

ここで、 N_k は k 段目のフィルタ次数である。これらを用いて $\Delta H_k(e^{j0})$, $\Delta H_k(e^{j\pi})$ をそれぞれ求め、式 (16) に代入することにより、フィルタ全体の周波数特性劣化量が得られる。

$$|\Delta H(e^{j\omega})| \leq |h[0]| \sum_{k=1}^K |\Delta H_k(e^{j\omega})| \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^K |H_i(e^{j\omega})| \quad (24)$$

これにより、LPF や HPF について、通過域における特性劣化量推定が可能である。

4. 応用例

4.1 LPF への適用

通過域周波数を $0 \sim 0.1$ 、阻止域周波数を $0.125 \sim 0.5$ 、次数を 100 とし、フィルタ構成を縦続形とする。各係数を 20 ビットに丸め量子化したときの周波数特性劣化量と、その推定値を図 1 に示す。ケプストラムモーメントにより阻止域における劣化量が、角周波数 $\omega = 0$ で通過域における劣化量がそれぞれ推定できている。HPF の場合、 $\omega = \pi$ で通過域における劣化量を推定できる。このように、単位円上以外に零点が存在する場合でも、 z 平面で実軸上に相当する周波数では、特性劣化量を推定することができる。

次に、量子化ビット数を変化させたときの、フィルタの通過域および阻止域における最大誤差を評価した。これを図 2 に示す。それぞれの最大振幅誤差が、ケプストラムモーメントと $\omega = 0, \pi$ における劣化量から推定できている。なお、阻止域に関して、縦続形では係数感度が低く、提案手法では推定精度が良いため、最大振幅誤差は図 2 に示すようになる。

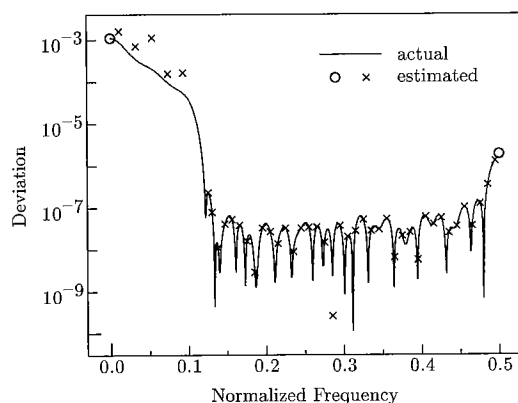


図 1 周波数特性劣化量の推定例
Fig.1 Estimation of magnitude response deviation for LPF.

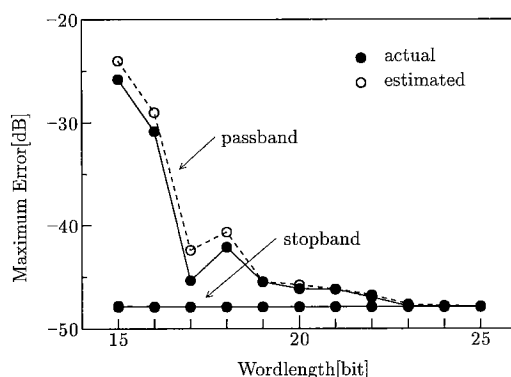


図 2 最大振幅誤差の推定
Fig.2 Estimation of maximum magnitude errors.

4.2 BPF への適用

本節では、扱う問題を縦続形フィルタに制限することで、BPF にケプストラムモーメントを適用し、特性劣化量を推定できることを示す。

ケプストラムモーメントは、式 (5), (10) より $m_0 > 0, Z_i \neq 1$ という制約を受ける。このため、零点が $z = 1$ に存在する可能性のある HPF や BPF には直接適用できない。周波数変換を用いることで HPF へ適用可能であるが、BPF に関しては、これまで適用が不可能とされ、検討が行われていなかった。

縦続形フィルタで、上記の制約を受けるのは、 $Z_i = 1$ の零点を含む縦続段のみである。従って、その他の縦続段にはケプストラムモーメントを適用できる。更に、直線位相で実現可能な最低次数で各段が構成されている場合、 $Z_i = 1$ の零点をもつ縦続段は、その係数が量子化の影響を受けないため、特性劣化が生じない。

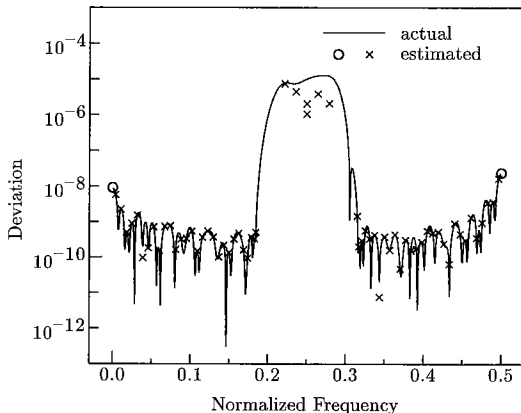


図3 BPFの特性劣化量推定

Fig.3 Estimation of magnitude response deviation for BPF.

そのため、ケプストラムモーメントが適用できないことは重要な問題ではない。

BPFの各係数を20ビットに丸め量子化したときの特性劣化量と、その推定値を図3に示す。なお、フィルタ仕様は、通過域周波数を0.225~0.275、阻止域周波数を0~0.185、0.315~0.5、次数を140とした。

5. 補正係数の近似

式(21)の補正係数は、複素数演算で求められる。ケプストラムモーメントが実数演算のみで得られるという特長を生かすため、この補正係数を二つの対数関数と1次関数で近似した。阻止域、すなわち単位円上の零点に関する補正係数は、フィルタの種類に関係なく、類似した特徴を示している。従って、フィルタの種類

を考慮することなく、補正係数の近似式を用いることができる。これにより、実数演算のみでフィルタの周波数特性劣化量を推定するため、推定に要する演算量を削減できる。

6. むすび

縦続形FIRデジタルフィルタの特性劣化量の推定を行った。ケプストラムモーメントにより、 z 平面で単位円上に存在する零点の偏角に相当する周波数において、フィルタの係数量子化による特性劣化量を推定できることを示した。また、 z 平面で実軸上に相当する周波数 $\omega = 0, \pi$ において、フィルタ係数から容易に特性劣化量を推定できることを示した。これらの評価を組み合わせることにより、通過域および阻止域において劣化量が推定できる。

更に、これまで不可能とされていたBPFへの適用を行い、その有効性を示した。しかし、BPFでは、通過域における特性劣化の評価はまだ不十分である。

今後の課題として、各縦続段を組み合わせた際の評価、係数量子化の影響が少ない構成、すなわち低感度構成への応用が挙げられる。

文 献

- [1] A. Khare and T. Yoshikawa, "Relation between moments of impulse response and poles and zeros," IEICE Trans. Fundamentals, vol.E75-A, no.5, pp.631-634, May 1992.
- [2] 吉川敏則, 瀬沼和宣, "縦続形FIRデジタルフィルタに対するケプストラムモーメントの応用," 信学技報, CAS93-85, Nov. 1993.

(平成9年11月19日受付, 10年1月22日再受付)