論　文

任意の平たん度を有するIIRハーフバンドフィルタの設計とフィルタバンクへの応用

山下　亮[†]　張　熙[†a)]　吉川　敏則[†]　武井　由智[†]

Design of IIR Half-Band Filters with Arbitrary Flatness and Its Application to Filter Banks

Ryou YAMASHITA[†], Xi ZHANG[†a)], Toshinori YOSHIKAWA[†], and Yoshinori TAKEI[†]

あらまし　ハーフバンドフィルタはマルチレート信号処理やウェーブレットなどの応用において重要である．従来，FIR ハーフバンドフィルタが主に取り扱われてきたが，IIR フィルタは低次数で FIR フィルタと同等の周波数特性を得ることができる．また，フィルタバンクやウェーブレットなどの応用では，平たん度が任意に指定できるハーフバンドフィルタの設計が必要である．本論文では，任意の平たん度を有する IIR ハーフバンドフィルタの新しい設計法を提案する．本設計法では，最大平たんフィルタの場合，フィルタ係数の解析解を与える．また，指定された平たん度の場合，阻止域の振幅誤差を指定して設計できることを示す．更に，フィルタの安定性について調べ，因果的安定となるときの最小群遅延を明らかにする．最後に，IIR ハーフバンドフィルタを 2 チャネルフィルタバンクの設計に適用し，本設計法の有効性を示す．

キーワード　ハーフバンドフィルタ，IIR フィルタ，フィルタバンク，平たん特性

1. まえがき

ハーフバンドフィルタは，マルチレート信号処理やウェーブレットなどの多くの応用において重要である [1]～[3]．ハーフバンドフィルタの設計に関しては，現在までに数多くの設計法が提案されている [4]～[13]．これらの設計法の多くは，常に安定で完全直線位相特性が容易に得られるなどの利点から，主に FIR ハーフバンドフィルタを取り扱ってきた [4], [5], [10]～[13]．一方，IIR フィルタは，FIR フィルタと比較すると，低次数で同程度の周波数特性を実現することができる．IIR ハーフバンドフィルタの設計法は FIR フィルタに比べていまだに少ない [7]～[9]．また，フィルタバンクやウェーブレットなどの応用では，ウェーブレットのレギュラリティ条件から，ハーフバンドフィルタに対し振幅特性が平たんとなるような条件が要求される [3], [6]．したがって，振幅特性の平たん度が任意に指定できるハーフバンドフィルタの設計が必要となる．

本論文では，任意の平たん度を有する IIR ハーフバンドフィルタの新しい設計法を提案する．まず，IIR ハーフバンドフィルタの通過域と阻止域における周波数特性の関係を調べ，フィルタの設計問題は阻止域における最大振幅誤差の最小化問題に帰着できることを示す．次に，指定された平たん条件から，フィルタ係数が満たすべき条件を導出する．よって，最大平たんフィルタの場合，フィルタ係数が解析的に求められ，その閉じた形の解を与える．また，任意に指定された平たん度の場合は，複素 Remez アルゴリズムを阻止域に適用し，阻止域の最大振幅誤差を指定することで，フィルタの設計問題を線形方程式の形で定式化する．よって，簡単な線形方程式を解くだけで，フィルタ係数が容易に求められる．そして，数回の反復計算で，指定された最大振幅誤差を満たす等リプル解が得られる．本設計法では，フィルタの平たん度と阻止域の最大振幅誤差を任意に与えられることが特長である．また，IIR ハーフバンドフィルタの安定性について検討し，因果的安定となるときの最小群遅延を明らかにする．最後に，本設計法を 2 チャネル完全再構成フィル

[†] 長岡技術科学大学工学部電気系，長岡市
Department of Electrical Engineering, Nagaoka University of Technology, Nagaoka-shi, 940–2188 Japan
a) E-mail: xiz@nagaokaut.ac.jp

タバンクの設計に適用し，その有効性を示す．

2. IIR ハーフバンドフィルタ

時間領域において，ハーフバンドフィルタのインパルス応答 $h(n)$ は次式の制約条件を満たす必要がある [4], [11].

$$\begin{cases} h(K) = 0.5 \\ h(K+2k) = 0 \qquad (k = \pm 1, \pm 2, \cdots) \end{cases} \tag{1}$$

ここで，K はフィルタの所望群遅延で，奇数である．また，周波数領域においては，低域通過フィルタの場合，所望の周波数特性は

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-jK\omega} & (0 \le \omega \le \omega_p) \\ 0 & (\omega_s \le \omega \le \pi) \end{cases} \tag{2}$$

となる．ここで，ω_p と ω_s はそれぞれ通過域と阻止域端周波数であり，$\omega_p + \omega_s = \pi$ である．

式 (1) の時間域条件を満たす IIR ハーフバンドフィルタの伝達関数 $H(z)$ は

$$H(z) = \frac{z^{-K}}{2} + \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n z^{-2n}}{\displaystyle\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-2m}} \tag{3}$$

で表される．ここで，N と M は整数であり，フィルタ係数 a_n と b_m は実数で，$b_0 = 1$ である．式 (3) から新たな伝達関数 $\hat{H}(z)$ を構成すると，

$$\hat{H}(z) = z^K H(z) = \frac{1}{2} + \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n z^{K-2n}}{\displaystyle\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-2m}} \tag{4}$$

が得られる．よって，$\hat{H}(z)$ の周波数特性は

$$\hat{H}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} + \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n e^{j(K-2n)\omega}}{\displaystyle\sum_{m=0}^{M} b_m e^{-j2m\omega}} \tag{5}$$

となる．また，式 (2) より，$\hat{H}(z)$ の所望周波数特性は

$$\hat{H}_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & (0 \le \omega \le \omega_p) \\ 0 & (\omega_s \le \omega \le \pi) \end{cases} \tag{6}$$

である．式 (5) より，$\hat{H}(z)$ の周波数特性は次式の関係を満たす．

$$\hat{H}(e^{j\omega_0}) + \hat{H}^*(e^{j(\pi-\omega_0)}) \equiv 1 \tag{7}$$

ただし，x^* は x の複素共役を表す．式 (7) は，周波数点 ω_0 と $\pi - \omega_0$ における周波数特性の和が一定で，フィルタ係数 a_n と b_m に依存しないことを意味する．ω_0 を通過域内にある周波数点とすれば，$\pi - \omega_0$ は阻止域に位置することがわかる．したがって，式 (7) より，$\hat{H}(z)$ の周波数特性を通過域または阻止域のどちらか一方で近似すればよいことになる．ここでは，阻止域における最大振幅誤差を δ_s と仮定する．よって，通過域における最大振幅誤差 δ_p と最大位相誤差 $\Delta\theta_p$ は

$$\begin{cases} \delta_p \le \delta_s \\ \Delta\theta_p \le \sin^{-1} \delta_s \end{cases} \tag{8}$$

となり，通過域の振幅誤差と位相誤差は阻止域の最大振幅誤差 δ_s に支配されることがわかる．したがって，ハーフバンドフィルタの設計問題は阻止域における振幅誤差の最小化問題に帰着できる．以下では，阻止域における $\hat{H}(z)$ の近似について考える．

3. IIR ハーフバンドフィルタの設計

3.1 最大平たんハーフバンドフィルタ

フィルタバンクやウェーブレットなどの応用では，ウェーブレットのレギュラリティ条件から，ハーフバンドフィルタの振幅特性が平たんとなるように要求される [3], [6]．その平たん条件は

$$\left.\frac{\partial^r \hat{H}(e^{j\omega})}{\partial \omega^r}\right|_{\omega=\pi} = 0 \quad (r = 0, 1, \cdots, L-1) \tag{9}$$

である．ここで，L はフィルタの平たん度であり，$0 \le L \le N + M + 1$ である．式 (9) の平たん条件を満たすには，$\omega = \pi$ に L 個の多重零点を置く必要がある．ここで，式 (5) の周波数特性を以下のように書き直す．

$$\hat{H}(e^{j\omega}) = \frac{N(\omega)}{D(\omega)} \tag{10}$$

ただし，

$$N(\omega) = \sum_{n=0}^{N} a_n e^{j(K-2n)\omega} + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{M} b_m e^{-j2m\omega} \tag{11}$$

である．よって，式 (9) の平たん条件は次式と等価となる．

$$\left.\frac{\partial^r N(\omega)}{\partial \omega^r}\right|_{\omega=\pi} = 0 \quad (r = 0, 1, \cdots, L-1) \qquad (12)$$

したがって，$\hat{H}(e^{j\omega})$ の分子多項式 $N(\omega)$ を r 回微分し，式 (12) の平たん条件に代入すると，

$$\begin{cases} 2\sum_{n=0}^{N} a_n - \sum_{m=1}^{M} b_m = 1 \\ 2\sum_{n=0}^{N} a_n (K-2n)^r - \sum_{m=1}^{M} b_m (-2m)^r = 0 \\ \qquad (r = 1, 2, \cdots, L-1) \end{cases} \qquad (13)$$

が得られる．$L = N + M + 1$ のとき，即ち，最大平たんフィルタの場合，上式の線形方程式に唯一の解が存在し，式 (13) を解けば，フィルタ係数 a_n と b_m が容易に求められる．また，Cramer の規則と Vandermonde の行列式を利用することにより，式 (13) の線形方程式は解析的に解くことができ，その閉じた形の解は次式で与えられる．

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{(-1)^{N-n}}{2} \dfrac{M!}{n!(N-n)!} \dfrac{\prod_{i=0}^{N}\left(\frac{K}{2} - i\right)}{\prod_{i=0}^{M}\left(\frac{K}{2} - n + i\right)} \\ b_m = (-1)^m \dbinom{M}{m} \prod_{i=0}^{N} \dfrac{\frac{K}{2} - i}{\frac{K}{2} + m - i} \end{cases} \qquad (14)$$

ここで，$M = 0$ のとき，FIR 最大平たんハーフバンドフィルタとなり，文献 [12] と同じ解になる．

3. 2 任意の平たん度を有するフィルタ

文献 [9] と [11] に示されたように，最大平たんフィルタは，通過域と阻止域の振幅特性が共に平たんであるが，遷移域はより広くなる．よって，指定された平たん度を満たしながら，より急しゅんな特性（すなわち，より狭い遷移域）をもつフィルタの設計が必要である．以下は，任意の平たん度を有するハーフバンドフィルタの設計，すなわち，$L \le N + M$ の場合について考える．

3. 2. 1 独立零点の初期値

IIR ハーフバンドフィルタはその係数が $N+M+1$ 個あるので，独立零点の数は $N+M+1$ である．図 1 に示されるように，$L \le N + M$ の場合，$z = -1$ 以外の独立零点の数は $N + M + 1 - L$ となる．実係数フィルタの場合，z 平面において $z = \pm 1$ 以外の単位円上の零点は，必ず複素共役対となるため，$N + M + 1 - L$ は偶数でなければならない．すなわち，$N + M + 1 - L = 2I$ である．阻止域の振幅誤差を最小化するためには，これらの残りの独立零点すべてを z 平面の単位円上に配置する必要がある．よって，阻止域において $2I$ 個の独立零点を次のように設定する．

$$z_i = e^{\pm j\hat{\omega}_i} \quad \left(\frac{\pi}{2} < \hat{\omega}_1 < \hat{\omega}_2 < \cdots < \hat{\omega}_I < \pi\right) \qquad (15)$$

式 (4) より，

$$\hat{H}(z_i) = \frac{1}{2} + \frac{\sum_{n=0}^{N} a_n e^{\pm j(K-2n)\hat{\omega}_i}}{\sum_{m=0}^{M} b_m e^{\pm j(-2m)\hat{\omega}_i}} = 0 \qquad (16)$$

となる．式 (16) を実数部と虚数部に分けると，

$$\begin{cases} 2\sum_{n=0}^{N} a_n \cos\{(K-2n)\hat{\omega}_i\} \\ \qquad + \sum_{m=1}^{M} b_m \cos(2m\hat{\omega}_i) = -1 \\ 2\sum_{n=0}^{N} a_n \sin\{(K-2n)\hat{\omega}_i\} \\ \qquad - \sum_{m=1}^{M} b_m \sin(2m\hat{\omega}_i) = 0 \end{cases} \qquad (17)$$

が得られる．式 (13) と式 (17) を合わせると，全部で $N+M+1$ 個の線形方程式となる．よって，この線形方程式を解くことにより，フィルタ係数 a_n と b_m の初期値が求められる．

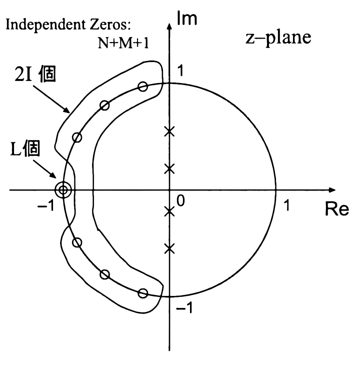

図 1　IIR ハーフバンドフィルタの極零点配置
Fig. 1　Pole-zero location of IIR half-band filters.

3.2.2 複素 Remez アルゴリズムによる定式化

3.2.1 で得られたフィルタ係数から，フィルタの振幅特性は阻止域において等リプル特性になるとは限らない．そこで，阻止域で等リプル特性を得るため，**3.2.1** で得られたフィルタ係数を初期値として利用し，複素 Remez アルゴリズムを用いて定式化を行う．フィルタ係数の初期値から，$\hat{H}(z)$ の周波数特性を求めて，阻止域において I 個の極値周波数点 ω_i を次のように探し，その位相 $\theta(\omega_i)$ を求める．

$$\frac{\pi}{2} < \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_I < \pi \tag{18}$$

次に，これらの周波数点において，次式のように定式化する．

$$\hat{H}(e^{j\omega_i}) = \delta e^{j\theta(\omega_i)} \tag{19}$$

ここで，δ は指定された振幅誤差で，既知である．すなわち，

$$|\hat{H}(e^{j\omega})| \leq \delta \qquad (\omega \in [\omega_s, \pi]) \tag{20}$$

となるように設計する．ただし，阻止域端周波数 ω_s はここでは指定できない．式 (5) を式 (19) に代入すると，次式が得られる．

$$\hat{H}(e^{j\omega_i}) = \frac{1}{2} + \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n e^{j(K-2n)\omega_i}}{\displaystyle\sum_{m=0}^{M} b_m e^{j(-2m)\omega_i}} = \delta e^{j\theta(\omega_i)} \tag{21}$$

さらに，式 (21) を実数部と虚数部に分けると，

$$\begin{cases} 2\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n \cos\{(K-2n)\omega_i\} + \sum_{m=1}^{M} b_m\{\cos(2m\omega_i) \\ \qquad -2\delta\cos\{\theta(\omega_i) - 2m\omega_i\}\} = 2\delta\cos\theta(\omega_i) - 1 \\ 2\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n \sin\{(K-2n)\omega_i\} - \sum_{m=1}^{M} b_m\{\sin(2m\omega_i) \\ \qquad +2\delta\sin\{\theta(\omega_i) - 2m\omega_i\}\} = 2\delta\sin\theta(\omega_i) \end{cases} \tag{22}$$

となる．式 (13) と式 (22) を合わせると，全部で $N+M+1$ 個の線形方程式となる．よって，この線形方程式を解くことにより，フィルタ係数 a_n と b_m が求められる．得られたフィルタ係数を用いて，$\hat{H}(z)$ の周波数特性を求め，阻止域で極値周波数点 Ω_i を探し，その位相 $\theta(\Omega_i)$ を計算する．その結果，サンプル周波数点 ω_i と極値周波数点 Ω_i は必ず一致するとは限らない．よって，得られた極値周波数点 Ω_i を次回のサンプル周波数点 ω_i として置き換え，再び式 (13) と式 (22) を解き，フィルタ係数を求める．この過程を繰り返して反復計算を行い，サンプル周波数点 ω_i と極値周波数点 Ω_i が一致したら，阻止域の等リプル特性が得られたとする．本論文では，**3.2.1** で得られたフィルタ係数を初期値として用いたため，数回の反復計算で設計アルゴリズムが収束する．

3.2.3 設計アルゴリズム

1. 分子の次数 N，分母の次数 M，所望群遅延 K，平たん度 L，阻止域の最大振幅誤差 δ を与える．
2. 式 (15) のように，阻止域で初期零点 $\hat{\omega}_i$ を等間隔に設定する．
3. 式 (13) と式 (17) の線形方程式を解いて，フィルタ係数の初期値 a_n と b_m を求める．
4. 得られた a_n と b_m を用いて，$\hat{H}(z)$ の周波数特性を求め，阻止域で極値周波数点 Ω_i を探し，その位相 $\theta(\Omega_i)$ を計算する．
5. $\omega_i = \Omega_i \quad (i = 1, 2, \cdots, I)$ とする．
6. 式 (13) と式 (22) の線形方程式を解いて，フィルタ係数 a_n と b_m を求める．
7. 得られたフィルタ係数 a_n と b_m を用いて，$\hat{H}(z)$ の周波数特性を求め，阻止域で極値周波数点 Ω_i を探し，その位相 $\theta(\Omega_i)$ を計算する．
8. $|\Omega_i - \omega_i| \leq \varepsilon \quad (i = 1, 2, \cdots, I)$ を満たすならば終了．満たさない場合は 5. に戻る．ただし，ε は与えられた収束許容値である．(一般的に，$\varepsilon = 1.0 \times 10^{-10}$)

4. フィルタの安定性

フィルタが因果的安定となるには，すべての極が単位円内に存在しなければならない．ディジタルフィルタの設計では，フィルタの極が単位円外より単位円内に多く存在するとき，その群遅延が高くなることが知られている．よって，すべての極を単位円内に位置させるには，ある一定値以上の群遅延を与える必要がある．本論文では，群遅延 K を変化させて，設計した IIR ハーフバンドフィルタの安定性を調べた．IIR ハーフバンドフィルタが因果的安定となるときの最小所望群遅延 K_{min} を表 1 に示す．まず，$M = 0$ のときは，FIR ハーフバンドフィルタとなるため，常に安定である．因果性を満たすために，最小群遅延は $K_{min} = 1$ である．次に，$M = N$ の場合，式 (14) から，分子と分母のフィルタ係数が対称となり，すな

表 1　IIR ハーフバンドフィルタが安定となる最小群遅延 K_{min}
Table 1　Minimum desired group delay K_{min} for stable IIR half-band filters.

	N=0	N=1	N=2	N=3	N=4	N=5	N=6	N=7	N=8	N=9	N=10	N=11	N=12	N=13	N=14	N=15
$M=0$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$M=1$	1	1	3	3	5	5	7	7	9	9	11	11	13	13	15	15
$M=2$	1	1	3	5	5	7	7	9	11	11	13	13	15	15	17	19
$M=3$	1	3	3	5	7	7	9	11	11	13	15	15	17	17	19	21
$M=4$	1	3	5	5	7	9	9	11	13	13	15	17	17	19	21	21
$M=5$	1	3	5	5	7	9	11	11	13	15	17	17	19	21	21	23
$M=6$	×	3	5	7	7	9	11	13	15	15	17	19	19	21	23	25
$M=7$	×	3	5	7	9	9	11	13	15	17	17	19	21	23	23	25
$M=8$	×	×	5	7	9	11	11	13	15	17	19	19	21	23	25	25
$M=9$	×	×	5	7	9	11	11	13	15	17	19	21	21	23	25	27
$M=10$	×	×	×	7	9	11	13	13	15	17	19	21	23	23	25	27
$M=11$	×	×	×	7	9	11	13	15	15	17	19	21	23	25	25	27
$M=12$	×	×	×	×	9	11	13	15	17	17	19	21	23	25	27	27
$M=13$	×	×	×	×	×	11	13	15	17	19	19	21	23	25	27	29
$M=14$	×	×	×	×	×	11	13	15	17	19	21	21	25	25	27	29
$M=15$	×	×	×	×	×	×	13	15	17	19	21	23	25	25	27	29

わち，オールパスフィルタを用いたハーフバンドフィルタとなる [7], [8]．そのとき，安定となる最小群遅延は $K_{min}=2N-1$ である．また，$0<M<N$ の場合，$N \le K_{min} \le 2N-1$ であり，$M>N$ の場合，$2N-1 \le K_{min} \le 2N+1$ である．ただし，$M \gg N$ の場合は，安定なフィルタが存在しない．表 1 では，×で表示されている．この場合，群遅延を高く与えても安定なフィルタは得られない．

5. フィルタバンクへの応用

近年，フィルタバンクやウェーブレットなどに関する研究が盛んに行われており，信号処理の様々な分野で応用されている [3], [6]．ここでは，IIR ハーフバンドフィルタの応用例の一つとして，2 チャネルフィルタバンクの設計について述べる．

本論文では，文献 [7] で提案された 2 チャネル完全再構成フィルタバンクに **3**. で述べた IIR ハーフバンドフィルタの設計法を適用する．2 チャネルフィルタバンクでは，$H_0(z), H_1(z)$ を分解フィルタ，$G_0(z)$, $G_1(z)$ を合成フィルタと仮定すると，フィルタバンクの完全再構成条件は

$$\left\{\begin{array}{l} H_0(z)G_0(z)+H_1(z)G_1(z)=z^{-2K_o-1} \\ H_0(-z)G_0(z)+H_1(-z)G_1(z)=0 \end{array}\right. \tag{23}$$

となる．ここで，K_o は整数である．文献 [7] より，

$$\left\{\begin{array}{l} H_0(z)=z^{-2K_2}+Q(z^2)H_1(z)=G_1(-z) \\ H_1(z)=\dfrac{1}{2}\{z^{-2K_1-1}-P(z^2)\}=-G_0(-z) \end{array}\right. \tag{24}$$

のように構成すると，式 (23) の完全再構成条件が満たされる．ただし，K_1, K_2 は整数で，$K_o=K_1+K_2$ である．ここで，$P(z), Q(z)$ を IIR フィルタとする．

5.1 高域通過フィルタの設計

次に，高域通過フィルタ $H_1(z)$ の設計について述べる．式 (24) より，$H_1(z)$ の伝達関数は

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{1}{2}\{z^{-2K_1-1}-P(z^2)\} \\ &= z^{-2K_1-1}\hat{H}_1(-z) \end{aligned} \tag{25}$$

である．ここで，

$$\hat{H}_1(z)=\frac{1}{2}\{1+z^{2K_1+1}P(z^2)\} \tag{26}$$

である．式 (26) より，$\hat{H}_1(z)$ は IIR ハーフバンドフィルタとなる．したがって，**3**. で述べた設計法を用いて，$\hat{H}_1(z)$ を低域通過フィルタとして設計すれば，式 (25) より，高域通過フィルタ $H_1(z)$ が得られる．

5.2 低域通過フィルタの設計

次に，低域通過フィルタ $H_0(z)$ の設計について述べる．文献 [7] より，$H_0(z)$ は同様にハーフバンドフィルタとなるため，**3**. で述べた設計法を用いて設計できる．しかし，$H_0(z)$ は $H_1(z)$ の影響を受けるため，阻止域で等リプル特性になるとは限らない [9], [11]．そこで，$H_0(z)$ の振幅特性を等リプルにするため，$H_1(z)$ の影響を考慮し，次式のように $\hat{H}_0(z)$ を低域通過フィルタとして設計する．

$$\begin{aligned} \hat{H}_0(z) &= \frac{z^{2K_2}}{2}H_0(z) \\ &= \frac{1}{2}+z^{2(K_2-K_1)-1}Q(z^2)\hat{H}_1(-z) \end{aligned} \tag{27}$$

$H_0(z)$ の阻止域において，理想的には，$\hat{H}_1(-z)$ の振幅は一定であるが，実際には振幅誤差が生じる．よって，複素 Remez アルゴリズムを用いて $H_0(z)$ を設計する際，$\hat{H}_1(-z)$ を含んだ式 (27) の $\hat{H}_0(z)$ を使って定式化すれば，阻止域で等リプル特性が得られる [9], [11].

6. 設計例

[設計例 1]　分子の次数 $N=8$，分母の次数 $M=2$，所望群遅延 $K=13$，平たん度 $L=3$，最大振幅誤差 $\delta=2.0\times10^{-3}$ を与え，IIR ハーフバンドフィルタを設計した．そのインパルス応答を図 2 に示す．時間域条件を満たし，かつ因果的安定な IIR ハーフバンドフィルタが得られたことがわかる．得られたフィルタの振幅特性と群遅延特性をそれぞれ図 3 と図 4 に実線で示す．また，$\delta=5.0\times10^{-3}$ と $\delta=8.0\times10^{-4}$ の振幅特性と群遅延特性も併せて示されている．図 3 と図 4 より，指定された設計仕様を満たし，また，指定された誤差が大きくなるほど遷移域が狭くなることがわかる．

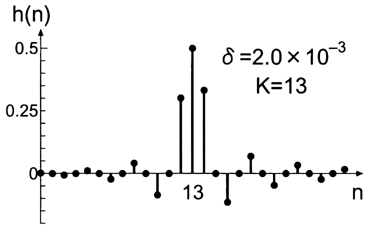

図 2　設計例 1 の IIR ハーフバンドフィルタのインパルス応答
Fig. 2　Impulse response of IIR half-band filter in Example 1.

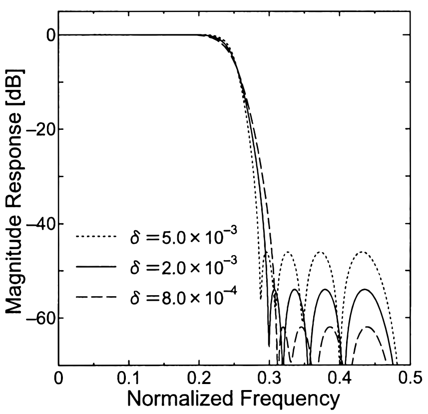

図 3　設計例 1 の IIR ハーフバンドフィルタの振幅特性
Fig. 3　Magnitude responses of IIR half-band filters in Example 1.

[設計例 2]　分子の次数 $N=5$，分母の次数 $M=3$，所望群遅延 $K=9$，最大振幅誤差 $\delta=1.0\times10^{-2}$，平たん度 $L=5$ を与えて，IIR ハーフバンドフィルタを設計した．表 1 より，得られた IIR ハーフバンドフィルタは所望群遅延が $K=7$ 以上であれば安定となる．得られたフィルタの振幅特性と群遅延特性をそれぞれ図 5 と図 6 に実線で示す．また，$L=1$ と $L=9$ の振幅特性と群遅延特性も併せて示されている．平たん

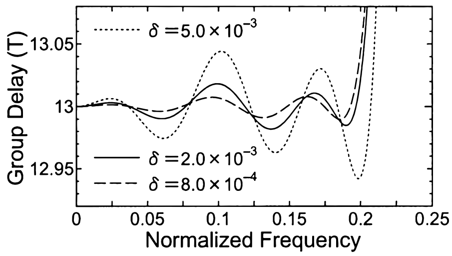

図 4　設計例 1 の IIR ハーフバンドフィルタの群遅延特性
Fig. 4　Group delay of IIR half-band filters in Example 1.

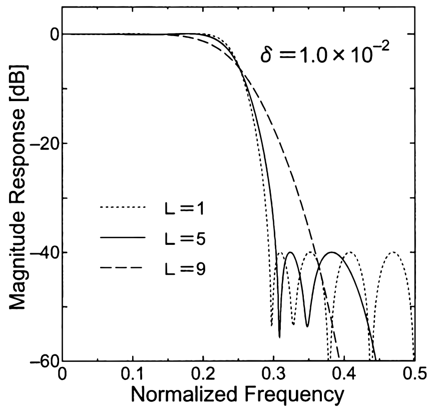

図 5　設計例 2 の IIR ハーフバンドフィルタの振幅特性
Fig. 5　Magnitude responses of IIR half-band filters in Example 2.

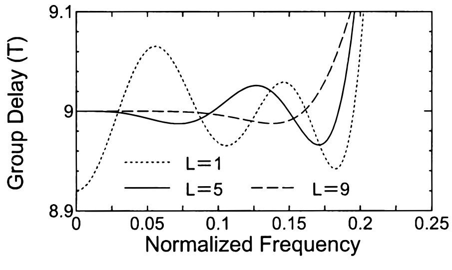

図 6　設計例 2 の IIR ハーフバンドフィルタの群遅延特性
Fig. 6　Group delays of IIR half-band filters in Example 2.

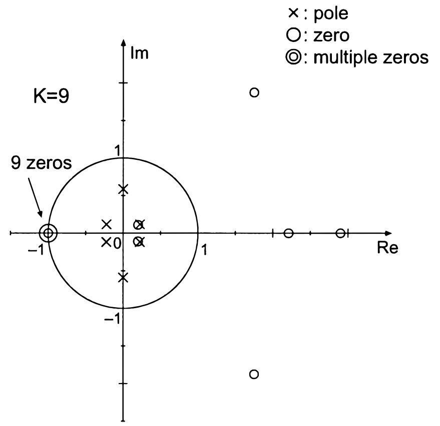

図 7　設計例 2 の最大平たん IIR ハーフバンドフィルタの極零点配置
Fig. 7　Pole-zero location of the maximally flat IIR half-band filter in Example 2.

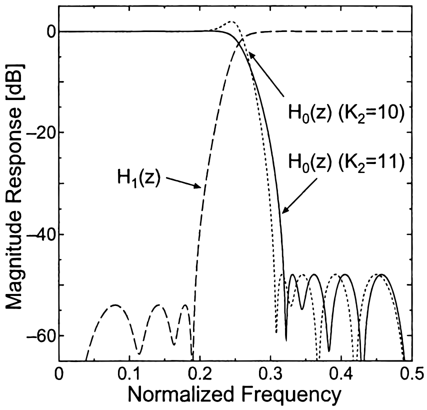

図 8　設計例 3 の分解フィルタの振幅特性
Fig. 8　Magnitude responses of analysis filters in Example 3.

度 $L = 9$ の場合は，IIR 最大平たんハーフバンドフィルタであり，遷移域が最も広くなる．その最大平たんフィルタの極零点配置を図 7 に示す．

[設計例 3]　$P(z)$ の分子次数 $N_1 = 6$，分母次数 $M_1 = 2$，$Q(z)$ の分子次数 $N_2 = 7$, 分母次数 $M_2 = 2$, $H_1(z)$ の平たん度 $L_1 = 3$，$H_0(z)$ の平たん度 $L_2 = 2$, それぞれの群遅延 $K_1 = 4, K_2 = 11$，最大振幅誤差を $\delta_1 = 2.0 \times 10^{-3}, \delta_2 = 4.0 \times 10^{-3}$ として 2 チャネルフィルタバンクを設計した．ここで，表 1 より，得られたフィルタバンクは安定となっている．得られた分解フィルタの振幅特性を図 8 に，群遅延特性を図 9 に示す．また，$H_0(z)$ の群遅延が $K_2 = 10$ のとき，その振幅特性と群遅延特性も点線で示している．図 8 からわかるように，$H_0(z)$ の群遅延 K_2 を変化させることにより，$H_0(z)$ の遷移域におけるオーバシュートを抑えることができる．

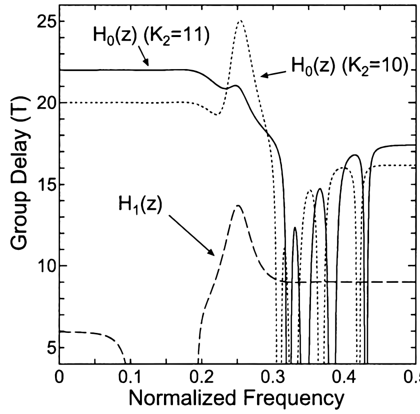

図 9　設計例 3 の分解フィルタの群遅延特性
Fig. 9　Group delays of analysis filters in Example 3.

7. む す び

本論文では，任意に与えられた平たん度を満たし，かつ阻止域の最大振幅誤差を指定して設計できる IIR ハーフバンドフィルタの新しい設計法を提案した．まず，IIR ハーフバンドフィルタの通過域と阻止域における周波数特性の関係を調べ，フィルタの設計問題が阻止域における最大振幅誤差の最小化問題に帰着できることを示した．次に，フィルタの阻止域に平たん条件を課すことで，最大平たんハーフバンドフィルタが解析的に得られることを示した．また，任意の平たん度の場合には，複素 Remez アルゴリズムを阻止域に適用し，フィルタの設計問題を線形方程式の形で定式化した．したがって，簡単な線形方程式を解くだけで，フィルタ係数が容易に求められる．そして，数回の反復計算で，指定された最大振幅誤差を満たす等リプル解が得られる．本設計法の特長は，フィルタの平たん度と阻止域の最大振幅誤差を任意に与えられることである．また，IIR ハーフバンドフィルタの安定性について検討し，因果的安定なフィルタとなるときの最小群遅延を明らかにした．最後に，本設計法を 2 チャネル完全再構成フィルタバンクの設計に適用し，その有効性を示した．

文　献

[1] S.K. Mitra and J.F. Kaiser, Handbook for Digital Signal Processing, John Wiley & Sons, New York, 1993.
[2] P.P. Vaidyanathan, Multirate Systems and Filter Banks, Prentice-Hall, 1993.
[3] G. Strang and T. Nguyen, Wavelets and Filter Banks, Wellesley-Cambridge Press, 1996.
[4] F. Mintzer, “On half-band, third-band, and Nth-band FIR filters and their design,” IEEE Trans. Acoust., Speech Signal Process., vol.ASSP-30, no.5, pp.734–738, Oct. 1982.
[5] P.P. Vaidyanathan and T.Q. Nguyen, “A ‘trick’ for the design of FIR half-band filters,” IEEE Trans. Circuits Syst., vol.CAS-34, no.3, pp.297–300, March 1987.
[6] M. Vetterli and C. Herley, “Wavelets and filter banks: theory and design,” IEEE Trans. Signal Process., vol.40, no.9, pp.2207–2232, Sept. 1992.
[7] S.M. Phoong, C.W. Kim, P.P. Vaidyanathan, and R. Ansari, “A new class of two channel biorthogonal filter banks and wavelet bases,” IEEE Trans. Signal Process., vol.43, no.3, pp.649–665, March 1995.
[8] I.W. Selesnick, “Formulas for orthogonal IIR wavelet filters,” IEEE Trans. Signal Process., vol.46, no.4, pp.1138–1141, April 1998.
[9] X. Zhang and T. Yoshikawa, “Design of two channel stable IIR perfect reconstruction filter banks,” IEICE Trans. Fundamentals, vol.E81-A, no.8, pp.1592–1597, Aug. 1998.
[10] S. Samadi, H. Iwakura, and A. Nishihara, “Multiplierless and hierarchical structures for maximally flat half-band FIR filters,” IEEE Trans. Circuits Systems-II, vol.46, no.9, pp.1225–1230, Sept. 1999.
[11] 張　熙, 猪爪堅太郎, 吉川敏則, “任意の平たん度を有する低遅延 FIR ハーフバンドフィルタの設計とフィルタバンクへの応用,” 信学論（A）, vol.J82-A, no.10, pp.1529–1537, Oct. 1999.
[12] S.C. Pei and P.H. Wang, “Closed-form design and efficient implementation of generalized maximally flat half-band FIR filters,” IEEE Signal Process. Lett., vol.7, no.6, pp.149–151, June 2000.
[13] S. Samadi, A. Nishihara, and H. Iwakura, “Universal maximally flat lowpass FIR systems,” IEEE Trans. Signal Process., vol.48, no.7, pp.1956–1963, July 2000.

（平成 14 年 3 月 20 日受付, 8 月 19 日再受付,
10 月 29 日最終原稿受付）

山下　亮　（学生員）

平 12 長岡技科大・電気電子システム工学卒．現在，同大大学院修士課程在学中．ディジタルフィルタ，フィルタバンク等の研究に従事．

張　熙　（正員）

1984 中国南京航空航天大学電子工程系卒．1993 電通大大学院博士課程了．博士（工学）．1984 南京航空航天大学助手．1993 電気通信大学助手．現在，長岡技術科学大学助教授．2000 年 9 月〜2001 年 6 月文部省在外研究員（米国マサチューセッツ工科大学）．1987 年度中国国家科学技術進歩三等賞，2002 年度第 4 回 LSI IP デザイン・アワードチャレンジ賞各受賞．2002 年から IEEE Signal Processing Letters Associate Editor．ディジタル信号処理，画像処理，フィルタ設計理論，近似理論，ウェーブレット，画像圧縮等の研究に従事．IEEE Senior Member．

吉川　敏則　（正員）

昭 46 東工大・電子卒．昭 51 同大大学院博士課程了．工博．埼玉大工学部助手，同大講師を経て，昭 58 より長岡技術科学大学助教授．現在，同大教授．ディジタル信号処理，コンピュータのソフトウェア応用等の研究に従事．IEEE 会員．

武井　由智　（正員）

1990 東工大・理学・数学卒．1992 同大大学院修士課程数学専攻了．修士（理学）．2000 同大学院博士課程物理情報工学専攻了．博士（工学）．1992 より 1995 まで川鉄情報システム（株）．1999 より 2000 まで東京工業大学電気電子工学科助手，2000 より現在まで長岡技術科学大学電気系助手，計算の複雑さ，ディジタル信号処理に関する研究に従事．LA, SIAM, ACM, AMS, IEEE 各会員．