論　文

近似的直線位相特性を有するチェビシェフ型IIRフィルタの設計

竹内　良介[†]　　張　　熙[†a)]　　吉川　敏則[†]　　武井　由智[†]

Design of Chebyshev-Type IIR Filters with Approximately Linear Phase Characteristics

Ryousuke TAKEUCHI[†], Xi ZHANG[†a)], Toshinori YOSHIKAWA[†], and Yoshinori TAKEI[†]

あらまし　直線位相特性を有するディジタルフィルタは信号処理の多くの応用において必要である．本論文では，通過域に近似的直線位相特性を有するチェビシェフ型IIRフィルタの設計について述べる．まず，阻止域の指定された周波数点に多重零点を配置することにより，フィルタの平たんな阻止域が容易に実現できることを示す．次に，通過域に複素Remezアルゴリズムを適用し，フィルタの設計問題を固有値問題として定式化する．よって，固有値問題を解くことにより，フィルタ係数が容易に求められる．更に，反復計算を行い，通過域における誤差関数の等リプル特性を得る．最後に，提案したチェビシェフ型フィルタと遅延器を並列接続し，近似的直線位相特性を有する逆チェビシェフ型IIRフィルタも同時に得られることを示す．

キーワード　IIRディジタルフィルタ，チェビシェフ型フィルタ，近似的直線位相特性，固有値問題，複素Remezアルゴリズム

1. まえがき

アナログフィルタと同様に，ディジタルフィルタには，代表的に最大平たん型，チェビシェフ型，逆チェビシェフ型とだ円型という4種類のフィルタがあり，数多くの応用で幅広く使われている[1], [2]．最大平たん型フィルタは通過域と阻止域にともに平たん特性を有し，だ円型フィルタは両方ともに等リプル特性である．一方，チェビシェフ型と逆チェビシェフ型フィルタは通過域あるいは阻止域の一方で等リプル特性，もう片方で平たん特性を有するフィルタであり，リンキングやチェス盤ひずみ等を抑えるため，画像処理の多くの応用に必要である[2], [3]．これらのディジタルフィルタ設計においては，従来のアナログフィルタ設計理論を利用する方法が最も一般的である[1], [2]．しかし，アナログフィルタから$s-z$変換で得られたIIRディジタルフィルタはその分子と分母が必ず同次数であり，また，フィルタの位相特性が指定できないなどの問題点がある[1], [2]．よって，直接z領域でディジタルフィルタを設計する必要があり，今まで数多くの設計法が提案されてきた[4]〜[14]．その中で，通過域の位相特性も同時に考慮された設計法がいくつかある[7], [12], [14]．フィルタの直線位相特性はディジタル信号及び画像処理の数多くの応用に必要である．周知のように，FIRフィルタでは，フィルタ係数に対称条件を課すことにより，完全直線位相特性が容易に実現できるが[8], [11]，IIRフィルタの場合，因果安定性のため，完全直線位相特性が実現できず，振幅特性とともに位相特性も近似しなければならない[7], [12], [14]．そこで，通過域に近似的直線位相特性を有するチェビシェフ型IIRフィルタの設計について考える．

本論文では，通過域等リプル阻止域平たん特性を有するチェビシェフ型IIR直線位相フィルタの一設計法を提案する．本設計法では，まず，阻止域の指定された周波数点に多重零点を配置することにより，阻止域の平たん特性が容易に実現できることを示す．よって，フィルタの設計問題は通過域における周波数特性の近似問題に帰着される．次に，通過域に複素Remezアルゴリズムを適用し，フィルタの設計問題を一般化固有値問題の形で定式化する[14]．誤差関数の最大振幅が最小となるような固有値を求め，その対応する固有ベクトルがフィルタ係数になる．更に，上述の計算過程

† 長岡技術科学大学工学部電気系，長岡市
Department of Electrical Engineering, Nagaoka University of Technology, Nagaoka-shi, 940–2188 Japan
a) E-mail: xiz@nagaokaut.ac.jp

を繰り返すことにより，通過域における誤差関数の等リプル特性が得られる．また，提案したチェビシェフ型フィルタと一つの遅延器を並列接続し，通過域に近似的直線位相特性を有する逆チェビシェフ型 IIR フィルタが同時に実現できることを示す．最後に，IIR チェビシェフ型低域通過フィルタと帯域阻止フィルタの設計例を示し，本設計法の有用性を明らかにする．

2. チェビシェフ型 IIR フィルタ

IIR ディジタルフィルタの伝達関数 $H(z)$ は次式のように定義される．

$$H(z) = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n z^{-n}}{\displaystyle\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}} \tag{1}$$

ここで，N と M はそれぞれ分子と分母の次数であり，フィルタ係数 a_n と b_m は実数で，$b_0 = 1$ である．

チェビシェフ型フィルタでは，阻止域において，その振幅特性が平たんであることが要求される．すなわち，

$$\left.\frac{\partial^k |H(e^{j\omega})|}{\partial \omega^k}\right|_{\omega=\omega_s} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, K-1) \tag{2}$$

となる．ここで，ω_s は阻止域に指定された周波数点であり，K は平たん度を表すパラメータである．また，通過域においては，フィルタの所望周波数特性を $H_d(e^{j\omega})$ とし，

$$H_d(e^{j\omega}) = |H_d(e^{j\omega})| e^{j\theta_d(\omega)} \quad (\omega \in \text{passband}) \tag{3}$$

である．ここで，$|H_d(e^{j\omega})|$ は通過域における所望振幅特性であり，$\theta_d(\omega)$ は所望位相特性である．直線位相フィルタの場合，$\theta_d(\omega)$ は直線位相で，すなわち，群遅延が一定値である．

フィルタの周波数特性と所望周波数特性の差を誤差関数 $E(\omega)$ として以下のように定義する．

$$E(\omega) = W(\omega)[H(e^{j\omega}) - H_d(e^{j\omega})] \tag{4}$$

ここで，$W(\omega)$ は重み関数である．よって，通過域において，設計目標は誤差関数 $E(\omega)$ の最大振幅を最小化することである．すなわち，

$$\min\{\max_{\omega} |E(\omega)|\} \tag{5}$$

である．

3. IIR 低域通過フィルタの設計

ここでは，IIR 低域通過フィルタの設計について述べる．阻止域における平たん条件は式 (2) で表されている．ただし，低域通過フィルタの場合，$\omega_s = \pi$ である．この平たん条件を満たすには，$\omega = \pi$ に K 個の多重零点を置く必要がある．したがって，伝達関数 $H(z)$ は次式のように表される．

$$H(z) = \frac{(1+z^{-1})^K \displaystyle\sum_{n=0}^{N-K} c_n z^{-n}}{\displaystyle\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}} \tag{6}$$

式 (6) の伝達関数を用いれば，阻止域の平たん特性が実現できることがわかる．よって，低域通過フィルタの設計問題は通過域における周波数特性の近似問題に帰着される．

3.1 初期値の設定

通過域における直線位相フィルタの所望周波数特性は

$$H_d(e^{j\omega}) = e^{-j\tau\omega} \qquad (0 \le \omega \le \omega_p) \tag{7}$$

である．ここで，τ は所望の群遅延であり，ω_p は通過域端周波数である．式 (6) の伝達関数において，未知のフィルタ係数の数は $J = M + N - K + 1$ 個である．まず，通過域 $[0, \omega_p]$ に $L = \lceil J/2 \rceil$ 個の初期周波数点 $\hat{\omega}_i$ ($\omega_p > \hat{\omega}_1 > \hat{\omega}_2 > \cdots > \hat{\omega}_L \ge 0$) を選択する．ここで，$\lceil \star \rceil$ は $\star$ 以上の最小整数を意味する．J が偶数のとき，図 1 (a) に示されるように $\hat{\omega}_i$ ($\hat{\omega}_L \ne 0$) を等間隔に選ぶ．また，J が奇数のとき，図 1 (b) に示されるように，$\hat{\omega}_L = 0$ から $\hat{\omega}_i$ を選ぶ．次に，設計目標は誤差関数の最大振幅の最小化であるため，これらの周波数点 $\hat{\omega}_i$ における誤差関数の振幅が零となるように設定する．

$$E(\hat{\omega}_i) = W(\hat{\omega}_i)[H(e^{j\hat{\omega}_i}) - H_d(e^{j\hat{\omega}_i})] = 0 \tag{8}$$

式 (8) に式 (7) を代入し，

$$D(\hat{\omega}_i) \sum_{n=0}^{N-K} c_n e^{-j(n+\frac{K}{2})\hat{\omega}_i} - \sum_{m=0}^{M} b_m e^{-j(\tau+m)\hat{\omega}_i} = 0 \tag{9}$$

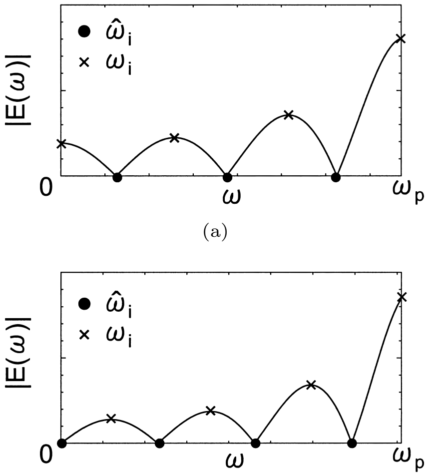


図 1　低域通過フィルタの初期周波数点の設定．(a) J が偶数の場合，(b) J が奇数の場合
Fig. 1　Selection of initial frequency points for lowpass filters. (a) even J, (b) odd J.

が得られる．ここで，$D(\omega) = (2\cos\frac{\omega}{2})^K$ である．$b_0 = 1$ であるので，式 (9) を実数部と虚数部に分けると，

$$D(\hat{\omega}_i)\sum_{n=0}^{N-K} c_n \cos\left(\left(n+\frac{K}{2}\right)\hat{\omega}_i\right) - \sum_{m=1}^{M} b_m \cos((\tau+m)\hat{\omega}_i) = \cos(\tau\hat{\omega}_i) \quad (10)$$

$$D(\hat{\omega}_i)\sum_{n=0}^{N-K} c_n \sin\left(\left(n+\frac{K}{2}\right)\hat{\omega}_i\right) - \sum_{m=1}^{M} b_m \sin((\tau+m)\hat{\omega}_i) = \sin(\tau\hat{\omega}_i) \quad (11)$$

となる．J が偶数のとき，式 (10) と式 (11) に方程式の数はともに L であり，合わせて $2L = J$ となる．また，J が奇数のとき，$\hat{\omega}_L = 0$ なので，式 (11) には，式 (10) より方程式の数は一つ少なくなり，$L-1$ であるので，合わせて $2L-1 = J$ となる．よって，式 (10) と式 (11) を解くことにより，フィルタ係数 c_n, b_m が唯一決定される．

3.2　複素 Remez アルゴリズムによる定式化

3.1 で得られたフィルタ係数から誤差関数 $E(\omega)$ を求め，その極値周波数点 ω_i ($\omega_p = \omega_1 > \omega_2 > \cdots \geq 0$) を探す．その結果，得られた誤差関数が等リプル特性になるとは限らない．そこで，複素 Remez アルゴリズムを用いて，等リプル特性になるように定式化を行う．図 1 に示されるように，極値周波数点 ω_i の数は，J が偶数のとき，$L+1$ 個，また，J が奇数のとき，L 個である（通過域端周波数 ω_p を含む）．極値周波数点 ω_i における誤差関数の位相を $\theta_e(\omega_i)$ とする．これらの極値周波数点 ω_i において，誤差関数の振幅が等しくなるように定式化する．

$$E(\omega_i) = W(\omega_i)[H(e^{j\omega_i}) - H_d(e^{j\omega_i})] = \delta e^{j\theta_e(\omega_i)} \quad (12)$$

ここで，δ は誤差関数の振幅である．よって，式 (12) を実数部と虚数部に分けると，

$$D(\omega_i)\sum_{n=0}^{N-K} c_n \cos\left(\left(n+\frac{K}{2}\right)\omega_i\right) - \sum_{m=0}^{M} b_m \cos((\tau+m)\omega_i) = \frac{\delta}{W(\omega_i)}\sum_{m=0}^{M} b_m \cos(m\omega_i - \theta_e(\omega_i)) \quad (13)$$

$$D(\omega_i)\sum_{n=0}^{N-K} c_n \sin\left(\left(n+\frac{K}{2}\right)\omega_i\right) - \sum_{m=0}^{M} b_m \sin((\tau+m)\omega_i) = \frac{\delta}{W(\omega_i)}\sum_{m=0}^{M} b_m \sin(m\omega_i - \theta_e(\omega_i)) \quad (14)$$

となる．図 1 からわかるように，J が偶数のとき，$\omega_{L+1} = 0$ なので，式 (14) には，式 (13) より方程式の数が一つ少なくなる．よって，式 (13) と式 (14) を合わせると，全部で $2L+1 = J+1$ 個となる．また，J が奇数のとき，$\omega_L > 0$ なので，合わせて $2L = J+1$ 個である．よって，J が偶数か奇数に関係なく，式 (13) と式 (14) の方程式の数は $J+1$ 個である．式 (13) と式 (14) を行列の形で表すと，次式のように一般化固有値問題に帰着することができる [14].

$$\mathbf{Px} = \delta\mathbf{Qx} \quad (15)$$

ここで，$\mathbf{x} = [b_0, b_1, \cdots, b_M, c_0, c_1, \cdots, c_{N-K}]^T$ である．また，行列 $\mathbf{P}$ と $\mathbf{Q}$ の要素 P_{ij}, Q_{ij} は，

$0 \leq i \leq L-1$, $0 \leq j \leq M$ のとき，

$$\begin{cases} P_{ij} = -\sin((\tau+j)\omega_{i+1}) \\ Q_{ij} = \dfrac{\sin(j\omega_{i+1} - \theta_e(\omega_{i+1}))}{W(\omega_{i+1})} \end{cases}$$

$0 \le i \le L-1,\ M+1 \le j \le J$ のとき，

$$\begin{cases} P_{ij} = D(\omega_{i+1}) \sin\left(\left(j - M - 1 + \dfrac{K}{2}\right)\omega_{i+1}\right) \\ Q_{ij} = 0 \end{cases}$$

$L \le i \le J,\ 0 \le j \le M$ のとき，

$$\begin{cases} P_{ij} = -\cos((\tau+j)\omega_{i+1-L}) \\ Q_{ij} = \dfrac{\cos(j\omega_{i+1-L} - \theta_e(\omega_{i+1-L}))}{W(\omega_{i+1-L})} \end{cases}$$

$L \le i \le J,\ M+1 \le j \le J$ のとき，

$$\begin{cases} P_{ij} = D(\omega_{i+1-L}) \\ \qquad \cdot \cos\left(\left(j - M - 1 + \dfrac{K}{2}\right)\omega_{i+1-L}\right) \\ Q_{ij} = 0 \end{cases}$$

である．よって，式 (15) の固有値問題を解き，誤差関数の振幅 δ が最小となるような固有値を求め，その対応する固有ベクトルはフィルタ係数 b_m と c_n となる．得られたフィルタ係数から誤差関数を計算し，新たな極値周波数点 ω_i を探し，その周波数点における誤差関数の位相 $\theta_e(\omega_i)$ を求める．それらの極値周波数点を次回のサンプル周波数点として置き換え，誤差関数の等リプル特性となるまで繰返し反復計算を行う．文献 [14] に示されたように，以上に述べた設計アルゴリズムは複素 Remez アルゴリズムを用いたため，その収束性は保証されない．設計仕様によっては，収束しない場合がある．アルゴリズムの収束性は **3.1** に述べた初期値に大きく依存し，多くの設計例を通じて，良好な収束性が確認されている．収束しない場合が生じたときは，初期周波数点 $\hat{\omega}_i$ を等間隔ではなく，通過域端近辺でより多く設定することで収束性を改善する必要がある．具体的な設計アルゴリズムを以下に示す．

3.3 設計アルゴリズム

1. 分子と分母の次数 N, M，平たん度 K，所望の群遅延 τ，通過域端周波数 ω_p を与える．

2. 通過域において L 個の初期周波数点 $\hat{\omega}_i$ を図 1 のように設定する．

3. 式 (10) と式 (11) の線形方程式を解き，フィルタ係数 c_n, b_m を求め，$E(\omega)$ の極値周波数点 ω_i を探し，その位相 $\theta_e(\omega_i)$ を計算する．

4. 行列 $\mathbf{P}$ と $\mathbf{Q}$ を計算し，式 (15) の固有値問題を解き，フィルタ係数 c_n, b_m を求める．

5. 得られた c_n, b_m を用いて，$E(\omega)$ の極値周波数点 Ω_i を探索し，その位相 $\theta_e(\Omega_i)$ を求める．

6. $|\Omega_i - \omega_i| < \varepsilon$ を満たすならば終了．満たさない場合は次へ進む．ただし，ε は与えられた収束許容値であり，一般に，$\varepsilon = 10^{-10}$ である．

7. $\omega_i = \Omega_i$ として，**4.** へ戻る．

3.4 IIR フィルタの安定性

3.3 に示された設計アルゴリズムでは，IIR フィルタの安定条件は設計条件として考慮されていなかった．よって，設計して得られた IIR フィルタは不安定になる可能性がある．しかし，文献 [4] と [5] に証明されたように，IIR フィルタの安定性は設計仕様に依存するため，一定値以上の群遅延を与えれば，その安定性が保証される．したがって，設計仕様を与えるとき，ある程度大きな群遅延を設定することにより，安定な IIR フィルタが設計できる．具体的な設計例については，文献 [14] を参照されたい．

4. IIR 帯域阻止フィルタの設計

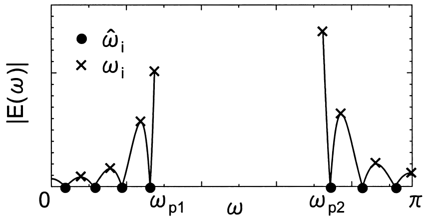
3. では，低域通過フィルタの設計について述べた．高域通過フィルタは設計した低域通過フィルタから周波数変換で，すなわち，伝達関数に z を $-z$ で置き換えるのみで，容易に得られる．以下，IIR 帯域阻止フィルタの設計について考える．阻止域におけるフィルタの平たん条件は式 (2) のように定義される．ただし，$0 < \omega_s < \pi$ である．阻止域の平たん条件を満たすために，$\omega = \pm\omega_s$ にそれぞれ K 個の零点を置く必要がある．すなわち，

$$H(z) = \frac{(1 - 2\cos\omega_s z^{-1} + z^{-2})^K \displaystyle\sum_{n=0}^{N-2K} c_n z^{-n}}{\displaystyle\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}} \tag{16}$$

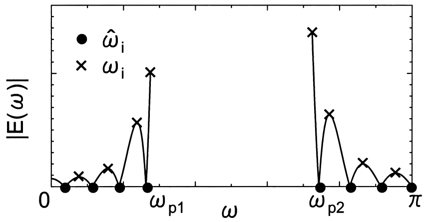
となる．よって，式 (16) の伝達関数を用いれば，平たんな阻止域が実現できる．また，通過域における所望周波数特性 $H_d(e^{j\omega})$ は

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\tau\omega} & (0 \le \omega \le \omega_{p1}) \\ e^{-j(\tau\omega - \theta_0)} & (\omega_{p2} \le \omega \le \pi) \end{cases} \tag{17}$$

である．ここで，実係数フィルタの場合，$\omega = \pi$ におけるフィルタの位相は $\theta(\pi) = n\pi$（n：整数）であるため，$\theta_0 = (n+\tau)\pi$ のように設定する必要がある．した



(a)



(b)

図 2　帯域阻止フィルタの初期周波数点の設定．(a) J が偶数の場合，(b) J が奇数の場合
Fig. 2　Selection of initial frequency points for bandstop filters. (a) even J, (b) odd J.

がって，低域通過フィルタの場合と同様に複素 Remez アルゴリズムを通過域に適用して設計できる．ただし，帯域阻止フィルタの場合，二つの通過域があるので，初期周波数点の設定については図 2 に示されている．式 (16) に未知フィルタ係数の数は $J = M + N - 2K + 1$ 個である．J が偶数のとき，$0 < \hat{\omega}_i < \pi$ のように L 個の $\hat{\omega}_i$ を選ぶ．そして，生じた極値周波数点 ω_i の数は $L + 2$ 個である ($\omega_i = 0$, π を含む)．複素 Remez アルゴリズムによる定式化に必要な数は $L + 1$ 個であるので，$\omega_i = 0$ あるいは $\omega_i = \pi$ における誤差関数の振幅が小さい方を削除し，残りの $L + 1$ 個の極値周波数点をサンプル周波数点とする．また，J が奇数のとき，$\hat{\omega}_i = 0$ または $\hat{\omega}_i = \pi$ のどちらかを選び，生じた極値周波数点から $\omega_i \neq 0$, π のように L 個のサンプル周波数点を選択する．また，帯域通過フィルタについては，以上に述べた設計法を直接に適用することができず，今後の研究課題である．

5. IIR 逆チェビシェフ型フィルタ

上述の設計法より設計したチェビシェフ型フィルタ $H(z)$ と一つの遅延器 z^{-I} を図 3 のように並列接続し，新たなフィルタ $G(z)$ を構成する．$G(z)$ の伝達関数は

$$G(z) = z^{-I} - H(z) \tag{18}$$

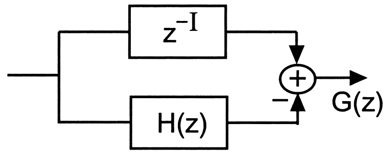


図 3　$H(z)$ と遅延器の並列接続構成
Fig. 3　Parallel-connection of $H(z)$ and a delay section.

となる．ここで，I は整数である．所望の群遅延を $\tau = I$ として $H(z)$ を設計する．ただし，帯域阻止フィルタの場合，$\theta_0 = 0$ とする．よって，式 (18) からわかるように，$H(z)$ の通過域は $G(z)$ の阻止域になり，等リプル特性である．また，$H(z)$ の阻止域において，その振幅は 0 であるため，$G(z)$ の通過域になる．$H(z)$ が阻止域に平たん特性を有するので，$G(z)$ の振幅特性 $|G(e^{j\omega})|$ と群遅延特性 $\tau(\omega)$ は

$$\begin{cases} |G(e^{j\omega_s})| = 1 \\ \left.\dfrac{\partial^k |G(e^{j\omega})|}{\partial \omega^k}\right|_{\omega=\omega_s} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, K-1) \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases} \tau(\omega_s) = I \\ \left.\dfrac{\partial^k \tau(\omega)}{\partial \omega^k}\right|_{\omega=\omega_s} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, K-2) \end{cases} \tag{20}$$

を満たし，ともに平たんとなる．よって，平たんな群遅延特性を有する IIR 逆チェビシェフ型フィルタが同時に実現できる．しかし，所望の群遅延 τ が整数 I に制限されているため，非整数遅延の逆チェビシェフ型フィルタはこの構成では設計できない．

6. 設　計　例

[設計例 1]　設計仕様として $N = 15$, $M = 6$, $K = 10$, $\omega_p = 0.3\pi$ を与え，$\tau = 12$ としたときのチェビシェフ型低域通過フィルタを設計した．得られたフィルタの誤差関数の振幅特性を図 4 に実線で示し，等リプル特性が得られたことがわかる．また，$\tau = 10.5$ と $\tau = 13.5$ として設計したフィルタの誤差関数の振幅特性も併せて示されている．それぞれのフィルタの振幅特性と群遅延特性を図 5 と図 6 に示す．得られたフィルタはすべて安定であり，$\tau = 12$ のフィルタの極零点配置を図 7 に示している．また，$\tau = 12$ のチェビシェフ型低域通過フィルタ $H(z)$ より，逆チェビシェ

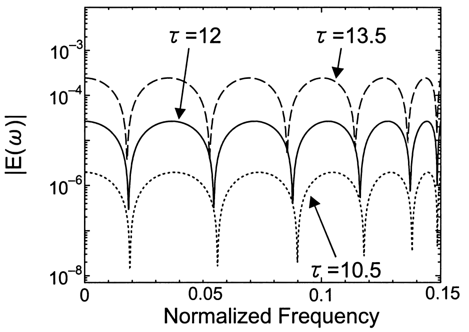


図 4　設計例 1 の誤差関数の振幅特性
Fig. 4　Magnitude responses of error functions in Example 1.

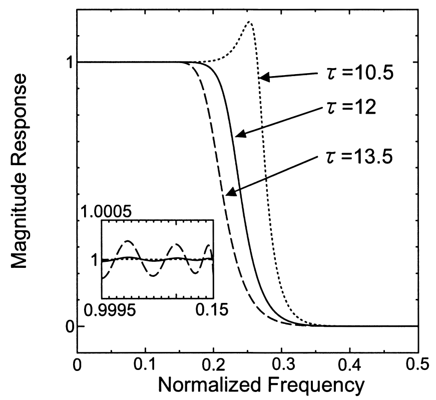


図 5　設計例 1 の低域通過フィルタの振幅特性
Fig. 5　Magnitude responses of lowpass filters in Example 1.

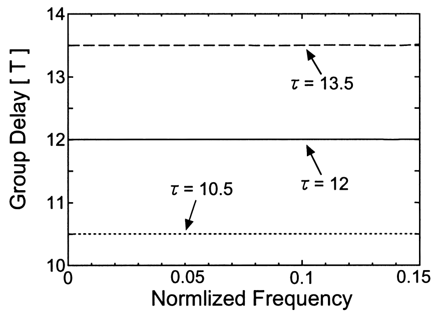


図 6　設計例 1 の低域通過フィルタの群遅延特性
Fig. 6　Group delays of lowpass filters in Example 1.

フ型高域通過フィルタ $G(z)$ を求めた．$G(z)$ の振幅特性と群遅延特性をそれぞれ，図 8 と図 9 に示す．

[設計例 2]　設計仕様として $N+M=19$，$K=10$，$\tau=11$，$\omega_p=0.48\pi$ を与え，N と M を変化させ

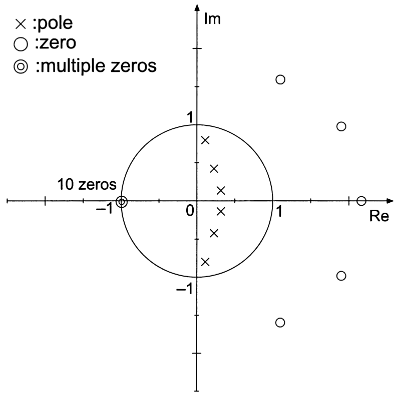


図 7　設計例 1 の低域通過フィルタの極零点配置
Fig. 7　Pole-zero location of lowpass filter in Example 1.

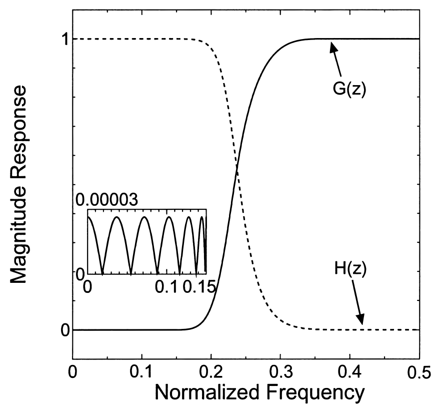


図 8　設計例 1 の高域通過フィルタの振幅特性
Fig. 8　Magnitude response of highpass filter in Example 1.

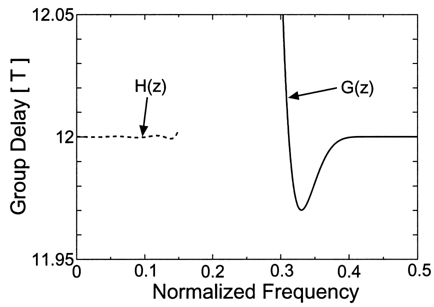


図 9　設計例 1 の高域通過フィルタの群遅延特性
Fig. 9　Group delay of highpass filter in Example 1.

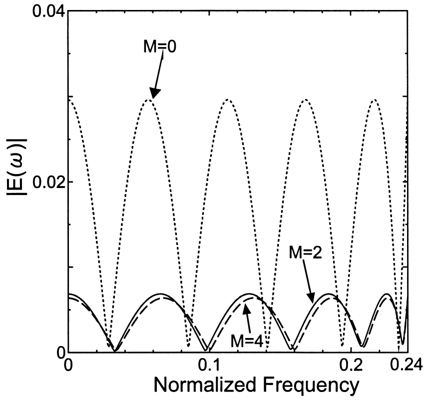


図 10　設計例 2 の誤差関数の振幅特性
Fig. 10　Magnitude responses of error functions in Example 2.

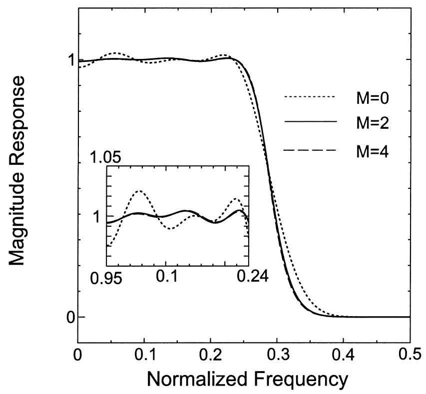


図 11　設計例 2 の低域通過フィルタの振幅特性
Fig. 11　Magnitude responses of lowpass filters in Example 2.

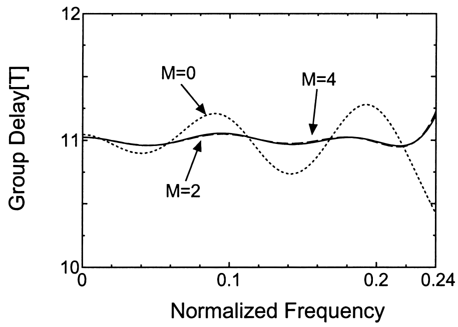


図 12　設計例 2 の低域通過フィルタの群遅延特性
Fig. 12　Group delays of lowpass filters in Example 2.

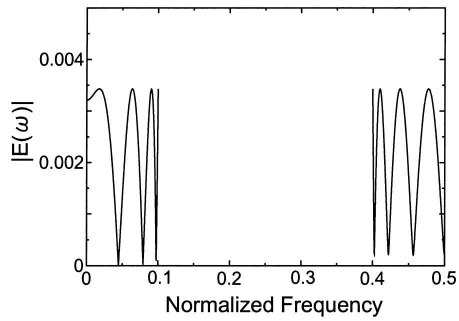


図 13　設計例 3 の誤差関数の振幅特性
Fig. 13　Magnitude response of error function in Example 3.

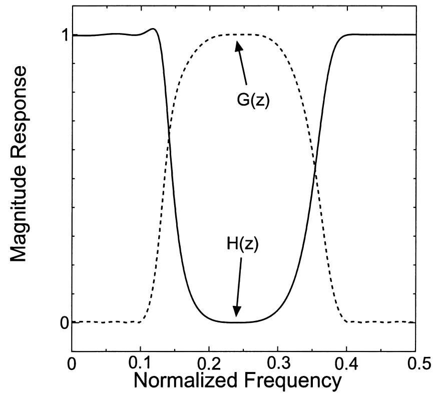


図 14　設計例 3 の帯域阻止と帯域通過フィルタの振幅特性
Fig. 14　Magnitude responses of bandstop and bandpass filters in Example 3.

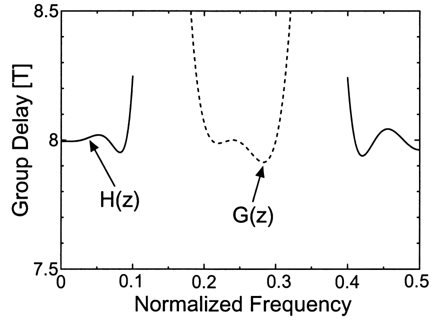


図 15　設計例 3 の帯域阻止と帯域通過フィルタの群遅延特性
Fig. 15　Group Delays of bandstop and bandpass filters in Example 3.

たときのチェビシェフ型低域通過フィルタの設計例を示す．ここで，$M=0$ の場合は，FIR フィルタとなるが，群遅延が次数の半分でないため，完全直線位相 FIR フィルタではなかった．設計したフィルタの誤差関数の振幅特性を図 10 に示す．図 10 より，等リプル特性が得られていることがわかる．また，$M=0$ の FIR フィルタと比較して，$M=4$ のフィルタはその誤差が最も小さくなることがわかる．得られた低域通過フィルタの振幅特性と群遅延特性をそれぞれ，図 11 と図 12 に示し，$M=2$ と $M=4$ の IIR フィルタは $M=0$ の FIR フィルタより振幅誤差と群遅延誤差がともに小さくなっていることがわかる．

[設計例 3]　設計仕様として $N=M=10$，$K=3$，$\tau=8$, $\theta_0=0$, $\omega_{p1}=0.2\pi$, $\omega_{p2}=0.8\pi$, $\omega_s=0.48\pi$ を与え，チェビシェフ型帯域阻止フィルタを設計した．この設計例では，初期周波数点 $\hat{\omega}_i$ を通過域 I $[0,\omega_{p1}]$ に 4 点，通過域 $[\omega_{p2},\pi]$ に 4 点配置した．設計したフィルタの誤差関数の振幅特性を図 13 に示し，等リプル特性であることがわかる．また，フィルタの振幅特性と群遅延特性をそれぞれ，図 14 と図 15 に実線で示す．式 (18) より得られた逆チェビシェフ型帯域通過フィルタ $G(z)$ の振幅特性と群遅延特性を図 14 と図 15 に点線で示す．

7. む す び

本論文では，通過域に近似的直線位相特性を有するチェビシェフ型 IIR フィルタの一設計法を提案した．本設計法では，まず，阻止域の指定された周波数点に多重零点を配置することにより，阻止域の平たん特性が容易に実現できることを示した．次に，通過域に複素 Remez アルゴリズムを適用し，フィルタの設計問題を一般化固有値問題の形で定式化した．よって，固有値問題を解き，フィルタ係数が容易に求められる．更に，反復計算を行い，通過域における誤差関数の等リプル特性が得られる．また，提案したチェビシェフ型フィルタと一つの遅延器を並列接続し，通過域に近似的直線位相特性を有する逆チェビシェフ型 IIR フィルタが同時に実現できることを示した．最後に，IIR チェビシェフ型低域通過フィルタと帯域阻止フィルタの設計例を示し，本設計法の有用性を明らかにした．今後の課題として，非整数遅延の逆チェビシェフ型直線位相フィルタの設計が挙げられる．

文　献

[1] S.K. Mitra and J.F. Kaiser, Handbook for Digital Signal Processing, John Wiley & Sons, New York, 1993.

[2] G. Strang and T. Nguyen, Wavelets and Filter Banks, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, 1996.

[3] 貴家仁志，よくわかるディジタル画像処理，CQ 出版，1996.

[4] J.P. Thiran, "Recursive digital filters with maximally flat group delay," IEEE Trans. Circuit Theory, vol.CT-18, no.6, pp.659–664, Nov. 1971.

[5] J.P. Thiran, "Equal-ripple delay recursive digital filters," IEEE Trans. Circuit Theory, vol.CT-18, no.6, pp.664–669, Nov. 1971.

[6] S. Darlington, "Filters with Chebyshev stopbands, flat passbands, and impulse responses of finite duration," IEEE Trans. Circuits Syst., vol.CAS-25, no.12, pp.966–975, Dec. 1978.

[7] 西川　清，武部　幹，"通過域振幅平坦且つ遅延最大平坦で阻止域準等リプル減衰特性の IIR 形低域ディジタルフィルタ，" 信学論（A），vol.J64-A, no.10, pp.819–826, Oct. 1981.

[8] P.P. Vaidyanathan, "Optimal design of linear phase FIR digital filters with very flat passbands and equiripple stopbands," IEEE Trans. Circuits Syst., vol.CAS-32, no.9, pp.904–917, Sept. 1985.

[9] X. Zhang and H. Iwakura, "Design of IIR digital filters based on eigenvalue problem," IEEE Trans. Signal Process., vol.44, no.6, pp.1325–1333, June 1996.

[10] I.W. Selesnick and C.S. Burrus, "Generalized digital Butterworth filter design," IEEE Trans. Signal Process., vol.46, no.6, pp.1688–1694, June 1996.

[11] I.W. Selesnick and C.S. Burrus, "Exchange algorithms for the design of linear phase FIR filters and differentiators having flat monotonic passbands and equiripple stopbands," IEEE Trans. Circuits Syst. II: Analog and Digital Signal Processing, vol.43, no.9, pp.671–675, Sept. 1996.

[12] R. Hegde and B.A. Shenoi, "Magnitude approximation of digital filters with specified degrees of flatness and constant group delay characteristics," IEEE Trans. Circuits Syst. II: Analog and Digital Signal Processing, vol.45, no.11, pp.1476–1486, Nov. 1998.

[13] 張　熙，吉川敏則，"通過域平坦阻止域等リプル特性を有する IIR ディジタルフィルタの設計，" 信学論（A），vol.J82-A, no.3, pp.317–324, March 1999.

[14] X. Zhang, K. Suzuki, and T. Yoshikawa, "Complex Chebyshev approximation for IIR digital filters based on eigenvalue problem," IEEE Trans. Circuits Syst. II: Analog and Digital Signal Processing, vol.47, no.12, pp.1429–1436, Dec. 2000.

（平成 14 年 3 月 20 日受付，9 月 14 日再受付，
12 月 6 日最終原稿受付）

竹内　良介　（学生員）

平 12 長岡技科大・電気電子システム卒．現在，同大大学院修士課程在学中．ディジタル信号処理等の研究に従事．

張　　熙　（正員）

1984 中国南京航空航天大学電子工程系卒．1993 電通大大学院博士課程了．博士（工学）．1984 南京航空航天大学助手．1993 電通大助手．現在，長岡技術科学大学助教授．2000 年 9 月～2001 年 6 月文部省在外研究員（米国マサチューセッツ工科大学）．1987 年度中国国家科学技術進歩三等賞，2002 年度第 4 回 LSI IP デザイン・アワードチャレンジ賞各受賞．2002 から IEEE Signal Processing Letters Associate Editor．ディジタル信号処理，画像処理，フィルタ設計理論，近似理論，ウェーブレット，画像圧縮等の研究に従事．IEEE Senior Member.

吉川　敏則　（正員）

昭 46 東工大・電子卒．昭 51 同大大学院博士課程了．工博．埼玉大工学部助手，同大講師を経て，昭 58 より長岡技術科学大学助教授．現在，同大教授．ディジタル信号処理，コンピュータのソフトウェア応用等の研究に従事．IEEE 会員．

武井　由智　（正員）

1990 東工大・理・数学卒，1992 同大大学院修士課程数学専攻了，修士（理学），2000 同大学院博士課程物理情報工学専攻修了，博士（工学）．1992 より 1995 まで川鉄情報システム（株）．1999 より 2000 まで東京工業大学電気電子工学科助手，2000 より現在まで長岡技術科学大学電気系助手，計算の複雑さ，ディジタル信号処理に関する研究に従事．LA, SIAM, ACM, AMS, IEEE 各会員．