# 論　文

# 量子化された帯域制限信号に対するSNR最大化内挿フィルタ

武井　由智[†]　茂木　孝一[††]　吉川　敏則[†]　張　熙[†††]

# SNR-Maximizing Interpolation Filters for Band-Limited Signals with Quantization

Yoshinori TAKEI[†], Kouichi MOGI[††], Toshinori YOSHIKAWA[†], and Xi ZHANG[†††]

**あらまし**　サンプリングレート変換で使われる内挿フィルタとして，一般的なフィルタより演算量の少ないハーフバンドフィルタがよく用いられるが，その振幅特性の制約により，フィルタの遷移域の量子化雑音を十分に減少させることができない．本論文では，量子化された帯域制限信号を入力信号とする $L$ 倍内挿フィルタの出力 SNR の解析を行い，出力 SNR を最大化する直線位相 FIR フィルタの設計法を提案する．設計法は，Type I FIR フィルタの範囲での SNR 最大化設計，それに $L$th バンドフィルタの制約を加えた場合での SNR 最大化設計のそれぞれが示されるが，いずれの設計も解析的に表示できる係数行列をもつ線形方程式の求解に帰着する．提案法によるフィルタは，量子化雑音のみが存在する帯域におけるゲインを抑えることにより，従来の通過域及び阻止域のみを考慮したフィルタでは次数の犠牲のもとでも達成できなかった SNR を達成している．

**キーワード**　内挿フィルタ，最小二乗設計，量子化雑音，SNR 改善

## 1. まえがき

補間法によるサンプリングレートの増加は，マルチレート信号処理の基本技術の一つである．一般に，サンプリングレートを上げる場合は，アップサンプラでサンプル間に零値を挿入した後，低域フィルタでイメージ成分を除去する，内挿フィルタが用いられる [1]．$L$ アップサンプラと内挿フィルタ $H(z)$ の縦続構成により，サンプリングレートを正整数 $L$ 倍にする内挿器を図 1 に示す．内挿フィルタとして通過域ゲイン $L$ をもつ直線位相 FIR フィルタを用いることが一般的であるが，特に，サンプリングレートを 2 倍にする場合，係数値の約半分が零となるために，演算量の点で有利な FIR ハーフバンドフィルタ [3], [7], [9] がよく用いられる．この場合，通過域及び阻止域における振幅特性を制御するようなフィルタ設計基準，例えば通過域及び阻止域における最大近似誤差を最小化する等リプル設計基準が用いられる．一方で，このような設計基準では遷移域における振幅特性を直接には制御できない．また，振幅特性は規格化角周波数 $\pi/2$ で奇対称となる制約を有する．

さて，実際のディジタル信号処理システムにおいて，内挿フィルタへの入力信号は帯域制限され，量子化されている．例えば，オーディオ CD の場合，帯域は最高 20[kHz] までであり，信号はサンプリングレート 44.1[kHz] でサンプリングされ，固定小数点表現で 16 ビットに量子化されている [4]．このようなディジタル信号を，図 1 の構成を用いてサンプリングレートを 2 倍にする場合，内挿フィルタ $H(z)$ への入力信号のうちイメージと量子化雑音を除く成分は角周波数において，$\pi/2$ よりも更に低く，$\pi/2 \cdot (2 \cdot 20/44.1)$ より低域側に帯域制限されていることになる．より一般的には，$0 < \alpha < 1$ である帯域制限係数 $\alpha$ を用いて，信号

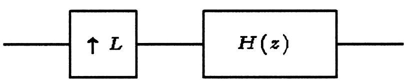


図 1　$L$ 倍内挿器
Fig. 1　An $L$-interpolator.

[†] 長岡技術科学大学電気系，長岡市
Department of Electrical Engineering, Nagaoka University of Technology, 1603–1 Kamitomiokamachi, Nagaoka-shi, 940–2188 Japan
[††] 日本精機株式会社，長岡市
Nippon Seiki Co. Ltd., 2–2–34 Higashizaou, Nagaoka-shi, 940–8580 Japan
[†††] 電気通信大学情報通信工学科，調布市
Department of Information and Communication Engineering, University of Electro-Communications, 1–5–1 Chofugaoka, Chofu-shi, 182–8585 Japan

は周波数領域 $[0, \alpha\pi/2)$ に帯域制限されていると表せる．一方，量子化雑音は，内挿フィルタの入力において，周波数領域の全域にわたって存在すると考えられる．この状況を模式的に，図 2 に表す．図 2 において灰色の領域は量子化雑音を，実線の台形は内挿フィルタが通過させるべき信号成分を，点線の台形はイメージ成分を表している．

このような量子化された帯域制限信号に対して，FIR ハーフバンドフィルタを内挿フィルタとして適用したとする．量子化雑音のうち内挿フィルタの阻止域に位置する成分は，フィルタの阻止域減衰量が十分であれば，それに応じて十分に抑圧される．つまり，フィルタ次数を高くして阻止域の振幅特性を理想値 0 に近づけることは，阻止域に位置する量子化雑音を抑圧するのに有効である．一方で，量子化雑音のうち内挿フィルタの遷移域（角周波数 $\omega$ が $\pi/2$ 付近）に位置する成分は，次数を上げることでは，必ずしも抑圧されないという問題がある [6], [10]．このことは，理想的に周波数領域を 2 分割するハーフバンドフィルタの振幅特性（$\omega \in [0, \pi/2)$ で 2，$\omega \in (\pi/2, \pi]$ で 0）が，量子化雑音のうち周波数領域 $\omega \in [\alpha\pi/2, \pi/2)$ に位置する成分を全く抑圧せずにそのまま通過させるということからも理解できる．すなわち，内挿フィルタとしてハーフバンドフィルタは，理想的なものでさえ，量子化された帯域制限信号の補間後の信号対雑音比（SNR）を最大化するという目的には最適といえない．

本論文では，量子化された帯域制限信号を $L$ 倍内挿する場合において，内挿フィルタの最適化により出力における信号対雑音比（SNR）を最大化するという問題を扱い，定められたフィルタ次数に対して最良の出力 SNR をもたらす内挿フィルタの設計法を提案する．**2.** において，内挿フィルタの出力における雑音の評価法を述べ，時間域における出力 SNR のおける定義を確立する．**3.** では，Sathe と Vaidyanathan [5], Tuqan と Vaidyanathan [8] によるマルチレートランダム信号の解析手法に基づき，時間域で定義された出力 SNR を，内挿フィルタの周波数特性で記述された周波数領域における SNR 理論式に変形する．そこで導出された SNR 理論式の妥当性は，時間域での SNR 定義式に基づくシミュレーションとの比較により，**4.** で検証される．**5.** では，導出された SNR 理論式を最大化する，直線位相 FIR $L$ 倍内挿フィルタ設計法を提案する．設計問題は最小二乗の問題に帰着され，フィルタ係数は連立一次方程式の求解により得られる．設計法は，内挿フィルタに $L$th バンドフィルタの条件を課す場合，課さない場合の両方について示される．提案法と従来法との出力 SNR 性能の比較，及び提案法によるフィルタ設計例が **6.** で示される．

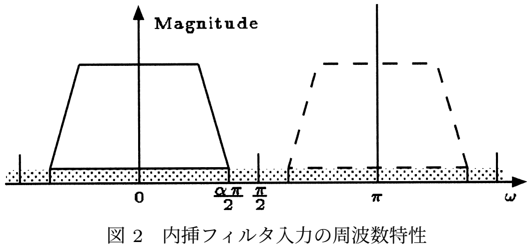

図 2　内挿フィルタ入力の周波数特性
Fig. 2　Frequency spectrum characteristics of the input signal of the interpolation filter.

## 2. 時間域における出力 SNR の定義

本章では，量子化された帯域制限信号に対する，$L$ 倍内挿フィルタの出力誤差の評価法を述べ，時間域における出力 SNR を定義する．

### 2.1 内挿器の出力誤差

まず量子化誤差不在のもとでの，内挿フィルタの出力誤差評価について考える．図 1 の $L$ 倍内挿器において，出力のサンプル数は入力のサンプル数の $L$ 倍である．そこで，この内挿器の出力誤差を評価するため，図 3 の構成をとる．原信号 $y[m]$ を $L$-ダウンサンプルして $x[n]$ とし，これを評価対象の内挿器に入力する．内挿器の $L$-アップサンプラによって原信号と等しいサンプル数の信号 $u[m]$ となり，これが内挿フィルタ $H(z)$ への入力である．内挿フィルタの出力 $\widetilde{y}[m]$ を原信号から減じた

$$e_f[m] := y[m] - \widetilde{y}[m] \tag{1}$$

は，内挿フィルタの特性の理想特性からのずれにより生じるものであり，これをフィルタリング雑音と呼ぶことにする．その二乗 $e_f[m]^2$ をとれば出力誤差の大きさが評価できるが，これは原信号 $y[m]$ 及び時刻 $m$ に依存する．内挿フィルタ $H(z)$ の評価のためには，これらを適切に規定する必要がある．

### 2.2 基準入力信号

原信号 $y[m]$ については周波数領域 $[0, \alpha\pi/2)$ に帯域制限され，かつ $H(z)$ の出力誤差を偏りなく評価できるものでなければならない．そこで，白色雑音 $w[m]$ を，$\alpha\pi/L$ より低域側に理想的に帯域制限した実数値ランダム信号 $y[m]$ を原信号として定義し，これを

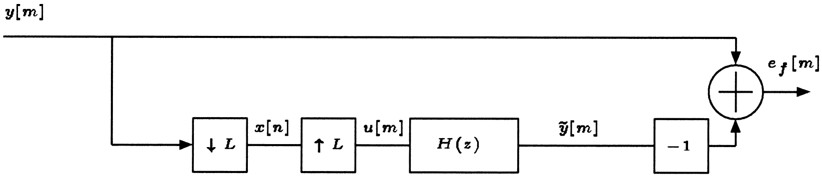


図 3　量子化雑音不在のもとでの内挿器出力誤差評価
Fig. 3　Output error assessment of an interpolator in the absence of quantization noise.

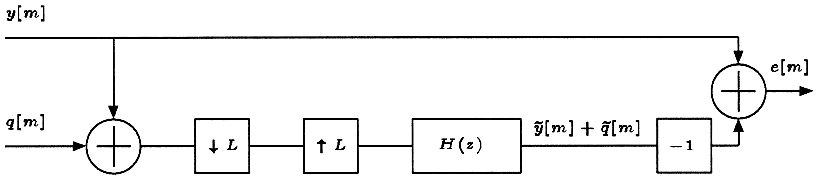


図 4　量子化雑音のもとでの内挿器出力誤差評価
Fig. 4　Output error assessment of an interpolator in the presence of quantization noise.

基準入力信号と呼ぶことにする．この $y[m]$ は弱定常（Wide Sense Stationary，WSS）過程である．したがって，自己相関の期待値

$$R_{yy}[k] := \mathsf{E}\Big[y[m]y[m-k]\Big]$$

が $m$ に無関係に定義され，パワースペクトル密度関数

$$S_{yy}(e^{j\omega}) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} R_{yy}[k]e^{-jk\omega}, \tag{2}$$

が定義される．帯域制限前の白色雑音 $w[m]$ のパワースペクトル密度関数を，分散 $\sigma_w^2$ を用いて

$$S_{ww}(e^{j\omega}) = \sigma_w^2 \qquad (\forall\,\omega\in\mathbb{R}) \tag{3}$$

と表せば，それを理想的に帯域制限した結果である $y[m]$ のパワースペクトル密度関数 $S_{yy}(e^{j\omega})$ は，

$$S_{yy}(e^{j\omega}) = \begin{cases} \sigma_w^2 & \left(\begin{array}{c}\exists\, s\in\mathbb{Z}, \quad \omega\in \\ [2\pi s - \frac{\alpha\pi}{L}, 2\pi s + \frac{\alpha\pi}{L}]\end{array}\right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4}$$

と書ける．

### 2.3　量子化雑音

実数値をとる $y[m]$ を丸め，小数点以下のビット長を $b$ の固定小数点数とする量子化に伴う雑音を，加法性雑音 $q[m]$ としてモデル化する．図 4 に，量子化雑音のもとでの内挿器出力誤差評価法を示す．図において，$\widetilde{q}[m]$ はダウンサンプラ，アップサンプラ，内挿フィルタ $H(z)$ の縦続接続の $q[m]$ に対する応答であり，

$$\widehat{y}\,[m] := \widetilde{y}\,[m] + \widetilde{q}\,[m] \tag{5}$$

が内挿フィルタ $H(z)$ の出力である．フィルタリング雑音と量子化雑音双方を考慮した出力誤差は

$$e[m] := y[m] - \widehat{y}[m] = y[m] - (\widetilde{y}[m] + \widetilde{q}[m]) \tag{6}$$

となる．

量子化雑音 $q[m]$ については，次の仮定をおく：$q[m]$ は $w[m]$ とは独立な白色雑音であり，そのパワースペクトル密度関数を

$$S_{qq}(e^{j\omega}) = \sigma_q^2 \qquad (\forall\,\omega\in\mathbb{R}) \tag{7}$$

とする．また，$y[m]$ と $q[m]$ とは結合 WSS 過程（Jointly WSS Processes）であることを仮定する．結合 WSS 性の定義については，次節で説明する．

$w[m]$ が $(-1,1)$ の実数値をとり，量子化により $y[m]$ が小数点以下の長さを $b$ bit に丸められる場合において，

$$\frac{\sigma_q^2}{\sigma_w^2} = 2^{-2(b+1)} \tag{8}$$

が成り立つ．

### 2.4 時間域における出力 SNR の定義

以上の設定のもとで，式 (6) の出力誤差 $e[m]$ と基準入力信号 $y[m]$ とのエネルギー比 $y[m]^2/e[m]^2$ をとり，その期待値を考えれば内挿フィルタの出力 SNR の定義として妥当であるように見える．しかし，$L$-アップサンプラの存在により，基準入力信号 $y[m]$，量子化雑音 $q[m]$ が WSS 過程であっても，$e[m]$ の WSS 性は保証されず，問題の期待値が $m$ に無関係に定まらない．次節で見るように，$e[m]$ は WSS よりやや弱く，$L$-巡回弱定常（$L$-Cyclo Wise Sense Stationary, $(\mathrm{CWSS})_L$）過程であることが保証され，出力二乗誤差の $L$ サンプル平均の期待値 $\mathsf{E}\left[L^{-1}\sum_{i=0}^{L-1} e[nL-i]^2\right]$ は $n$ に無関係に定まる．そこで，内挿フィルタ出力信号の信号対雑音比（SNR）を次式

$$\mathrm{SNR} := \frac{\mathsf{E}\left[\frac{1}{L}\sum_{i=0}^{L-1} y[i]^2\right]}{\mathsf{E}\left[\frac{1}{L}\sum_{i=0}^{L-1} e[i]^2\right]} \tag{9}$$

にて定義する．

### 2.5 出力 SNR 評価についての注意

本章で定義した SNR は，内挿フィルタ入力における量子化誤差に注目したものであり，現実の内挿フィルタ演算が有限語長で行われ，出力が再量子化されることに起因する雑音までは定義に込められていない．出力側量子化の影響を考慮したより精密な解析が望ましいことはいうまでもないが，内挿フィルタ入力の小数点以下ビット長 $b$ に比べ，内挿フィルタ演算とその出力の小数点以下ビット長が十分に長い場合においては本章のモデルでも現実によく当てはまると考えられる．

## 3. 周波数領域における SNR 理論式の導出

本章では，前章で定義した時間域における SNR を，内挿比 $L$，帯域制限係数 $\alpha$，入力の小数点以下ビット数 $b$ 及び内挿フィルタの周波数特性で記述された，周波数領域における SNR 理論式に変形する．

前章図 4 の内挿器出力誤差評価系は，$L$-アップサンプラの存在により時不変とならず，そのことが出力誤差の解析を若干複雑にする．そこで，文献 [5], [8] で示されているように，信号の隣接 $L$ 点をまとめたベクトル値信号を用いた解析を行う．

基準入力信号 $y[m]$ に対し，$L$ 次元ベクトル値信号

$$\mathbf{y}[n] := \begin{bmatrix} y[nL] \\ \vdots \\ y[nL-i] \\ \vdots \\ y[nL-(L-1)] \end{bmatrix} \tag{10}$$

を定義する（図 5）．信号 $y[m]$ の $z$ 変換とそのポリフェーズ分解

$$Y(z) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} y[m]\, z^{-m} = \sum_{i=0}^{L-1} z^i Y_i(z^L) \tag{11}$$

$$Y_i(z^L) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} y[nL-i]\, z^{-nL} \tag{12}$$

は $\mathbf{y}[n]$ の $z$ 変換

$$\mathbf{Y}(z^L) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbf{y}[n]\, z^{-nL} \tag{13}$$

との間に，次の関係をもつ：

$$\mathbf{Y}(z^L) = \begin{bmatrix} Y_0(z^L) \\ \vdots \\ Y_i(z^L) \\ \vdots \\ Y_{L-1}(z^L) \end{bmatrix}. \tag{14}$$

ここで，

$$\boldsymbol{\Phi}(z) := \begin{bmatrix} 1 & \ldots & z^i & \ldots & z^{L-1} \end{bmatrix} \tag{15}$$

とおくことで，式 (14) を

$$Y(z) = \boldsymbol{\Phi}(z)\mathbf{Y}(z^L) \tag{16}$$

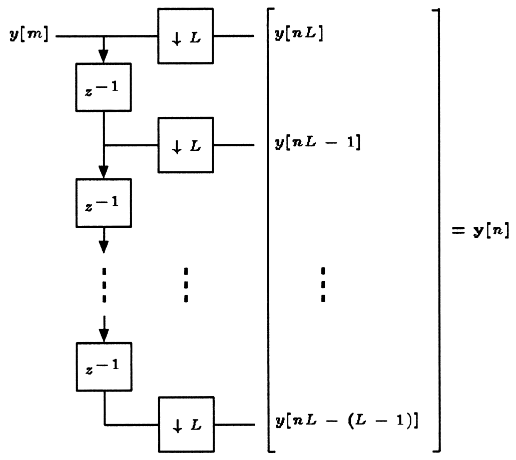


図 5 ベクトル値信号 $\mathbf{y}[n]$
Fig. 5 Vector valued signal $\mathbf{y}[n]$.

と書き直せる．本章では，任意のスカラ値信号 $x[m]$ に対し，$\mathbf{x}[n]$，$X(z)$，$X_i(z^L)$，$\mathbf{X}(z^L)$ は，前記式 (10)，(11)，(12)，(13) と同様に定義されたものを意味することにする．また，記述の節約のため，$s,t \in \mathbb{R}$ に対し

$$\mathsf{LT}(s,t) := \begin{cases} 1 & (s < t) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義する．

まず，量子化を考えない図 3 の入出力関係を $L$ 次元ベクトル信号を用いて等価的に書き換えることを考える．$L$-アップサンプラの出力の $L$ 次元ベクトル化 $\mathbf{u}[n]$ に対し，

$$\mathbf{U}(z^L) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{O}_{1,L-1} \\ \mathbf{O}_{1,L-1} & \mathbf{O}_{L-1} \end{bmatrix} \mathbf{Y}(z^L) \tag{17}$$

と書ける．ただし $\mathbf{O}_{1,L-1}$，$\mathbf{O}_{L-1,1}$，$\mathbf{O}_{L-1}$ はそれぞれ $1\times(L-1)$，$(L-1)\times 1$，$(L-1)\times(L-1)$ の 0 ブロックである．また，内挿フィルタの伝達関数 $H(z)$ をポリフェーズ表現

$$H(z) = \sum_{\ell=0}^{L-1} z^{-\ell} H_\ell(z^L) \tag{18}$$

すれば，

$$\begin{aligned} \widetilde{Y}(z) &= H(z)U(z) \\ &= \sum_{\lambda=0}^{L-1} z^{\lambda} \sum_{\substack{0\le i<L \\ 0\le \ell<L \\ i-\ell\equiv\lambda \pmod L}} z^{i-\ell-\lambda} H_\ell(z^L) U_i(z^L) \end{aligned} \tag{19}$$

を得るが，条件 $i-\ell \equiv \lambda \pmod L$ と $0 \le i < L$，及び $0 \le \ell < L$ のもとで $\ell = i - \lambda + L\,\mathsf{LT}(i,\lambda)$ であるから，

$$\widetilde{Y}(z) = \sum_{\lambda=0}^{L-1} z^{\lambda} \sum_{i=0}^{L-1} z^{-L\,\mathsf{LT}(i,\lambda)} H_{i-\lambda+L\,\mathsf{LT}(i,\lambda)}(z^L) U_i(z^L). \tag{20}$$

行列

$$\mathbf{H}(z^L) = \begin{bmatrix} H^{[\lambda,i]}(z^L) \end{bmatrix}_{\substack{0\le\lambda<L \\ 0\le i<L}}$$

を

$$H^{[\lambda,i]}(z^L) := z^{-L\,\mathsf{LT}(i,\lambda)} H_{i-\lambda+L\,\mathsf{LT}(i,\lambda)}(z^L) \tag{21}$$

により定義すると，$\mathbf{H}(z^L)$ は

$$\begin{bmatrix} H_0(z^L) & H_1(z^L) & \dots & H_{L-1}(z^L) \\ \frac{H_{L-1}(z^L)}{z^L} & H_0(z^L) & \dots & H_{L-2}(z^L) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{H_1(z^L)}{z^L} & \frac{H_2(z^L)}{z^L} & \dots & H_0(z^L) \end{bmatrix}$$

の形となり，式 (20) は $\widetilde{Y}(z) = \mathbf{\Phi}(z)\mathbf{H}(z^L)\mathbf{U}(z^L)$ と書ける．これを $\widetilde{Y}(z) = \mathbf{\Phi}(z)\widetilde{\mathbf{Y}}(z^L)$ と比較して，

$$\widetilde{\mathbf{Y}}(z^L) = \mathbf{H}(z^L)\mathbf{U}(z^L) \tag{22}$$

となる．(17) と合わせて，

$$\widetilde{\mathbf{Y}}(z^L) = \mathbf{G}(z^L)\mathbf{Y}(z^L), \tag{23}$$

ここで

$$\mathbf{G}(z^L) := \mathbf{H}(z^L) \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{O}_{1,L-1} \\ \mathbf{O}_{1,L-1} & \mathbf{O}_{L-1} \end{bmatrix} \tag{24}$$

を得る．以上を用いると，図 3 の入出力関係は図 6 に書き換えられる．

次いで，加法的量子化雑音のもとでの $L$ 次元化を考える．$q[m]$ と $\widetilde{q}[m]$ のそれぞれの $L$ 次元化には，同様に $\widetilde{\mathbf{Q}}(z^L) = \mathbf{G}(z^L)\mathbf{Q}(z^L)$ の関係が成立し，図 4 は図 7 に書き換えられる．ここで，基準入力信号と量子化雑音をまとめて，$2L$ 次元の $\begin{bmatrix}\mathbf{y}[n] & \mathbf{q}[n]\end{bmatrix}^T$ とすれば，$\mathbf{E}(z^L)$ は，$\mathbf{P}(z^L) = \begin{bmatrix}\mathbf{Y}(z^L) & \mathbf{Q}(z^L)\end{bmatrix}^T$ を用いて，

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z^L) &= \mathbf{Y}(z^L) - \widetilde{\mathbf{Y}}(z^L) - \widetilde{\mathbf{Q}}(z^L) \\ &= \begin{bmatrix}\mathbf{I}_L - \mathbf{G}(z^L) & -\mathbf{G}(z^L)\end{bmatrix} \mathbf{P}(z^L) \end{aligned} \tag{25}$$

と記述できる．

一方，信号 $y[m]$ に対する内挿器の出力 $\widetilde{y}[m]$ については，アップサンプラの影響により，WSS であることは保証されず，$L$-巡回弱定常（$L$-Cyclo Wide Sense Stationary，$(\mathrm{CWSS})_L$）過程となる．言い換えると，$\widetilde{y}[m]$ の連続 $L$ サンプル点を一つのベクトルとした $\widetilde{\mathbf{y}}[n]$ は $L$ 次元の WSS 過程となり，自己相関期待値行列

$$\mathbf{R}_{\widetilde{\mathbf{y}}\widetilde{\mathbf{y}}}[k] := \mathsf{E}\left[\widetilde{\mathbf{y}}[n]\widetilde{\mathbf{y}}^\dagger[n-k]\right]$$

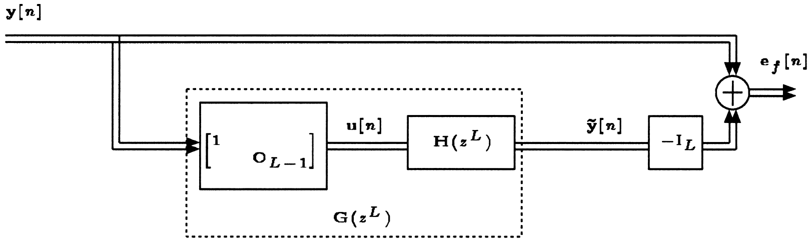


図 6　$L$ 次元信号による図 3 の等価表示
Fig. 6　An equivalent presentation of Fig. 3 using $L$-dimension signal.

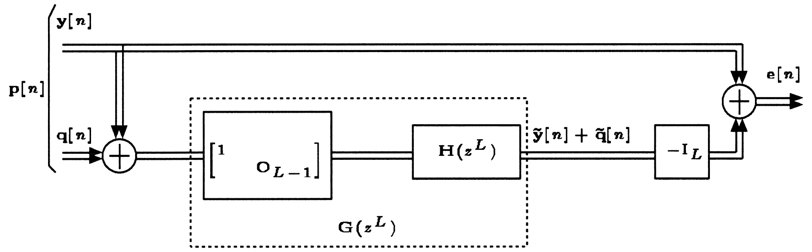


図 7　$L$ 次元信号による図 4 の等価表示
Fig. 7　An equivalent presentation of Fig. 4 using $L$-dimension signal.

が $n$ に無関係に定まる．この場合，パワースペクトル密度行列が，

$$\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}}(e^{jL\omega}) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}}[k]e^{-jkL\omega}$$

と定義される．量子化雑音に対するフィルタの出力 $\widetilde{q}[m]$ もまた $(\mathrm{CWSS})_L$ 過程であり，$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{q}}\tilde{\mathbf{q}}}[k]$ 及び $\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{q}}\tilde{\mathbf{q}}}(e^{jL\omega})$ が同様に定義される．

前節 **2. 3** において，$y[m]$ と $q[m]$ は結合 WSS 過程（Jointly WSS Processes）であることを仮定した．その定義は，二次元信号 $\begin{bmatrix} y[m] & q[m] \end{bmatrix}^T$ が WSS 過程であることである．このことから $\mathbf{y}[n]$ と $\mathbf{q}[n]$ とは結合 WSS 過程（Jointly WSS Processes）であること，すなわち，$2L$ 次元ベクトル

$$\mathbf{p}[n] = \begin{bmatrix} \mathbf{y}[n] \\ \mathbf{q}[n] \end{bmatrix}$$

が WSS 過程であることが成立する．また前節 **2. 3** での $w[m]$ と $q[m]$ の独立性の仮定から，$\mathbf{y}[n]$ と $\mathbf{q}[n]$ は無相関となり，

$$\mathbf{S}_{\mathbf{pp}}(e^{jL\omega}) = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{\mathbf{yy}}(e^{jL\omega}) & \mathbf{O}_L \\ \mathbf{O}_L & \mathbf{S}_{\mathbf{qq}}(e^{jL\omega}) \end{bmatrix} \tag{26}$$

と書ける．

このとき，上記の結合 WSS 性と式 (25) から $\mathbf{e}[n]$ もまた WSS 過程となり，$n$ によらず

$$\mathbf{R}_{\mathbf{ee}}[k] := \mathsf{E}\left[\mathbf{e}[n]\mathbf{e}^\dagger[n-k]\right] \tag{27}$$

及び

$$\mathbf{S}_{\mathbf{ee}}(e^{jL\omega}) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{R}_{\mathbf{ee}}[k]\, e^{-jkL\omega} \tag{28}$$

が定まる．特に

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &:= \frac{1}{L}\mathrm{trace}\left(\mathbf{R}_{\mathbf{ee}}[0]\right) = \frac{1}{L}\mathsf{E}\left[\mathbf{e}^\dagger[n]\mathbf{e}[n]\right] \\ &= \mathsf{E}\left[\frac{1}{L}\sum_{i=0}^{L-1}(e[nL-i])^2\right] \end{aligned} \tag{29}$$

が $n$ に無関係に定義される．最後の表示式 (29) より，$\mathcal{E}$ は量子化雑音 $q[m]$ のもとでの出力誤差のサンプル点当りの平均的エネルギーを表すものと考えられる．

この $\mathcal{E}$ を周波数領域で解析するため，次の補題を示す．

［**補題** 3.1］

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi L}\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{\Phi}(e^{j\omega})\mathbf{S}_{\mathbf{ee}}(e^{jL\omega})\mathbf{\Phi}^\dagger(e^{j\omega})d\omega.$$

（証明）　式 (27)，(28) 及び $\mathbf{e}[n]$ と $e[m]$ の関係より，

$$\frac{1}{L}\mathbf{\Phi}(e^{j\omega})\mathbf{S_{ee}}(e^{jL\omega})\mathbf{\Phi}^\dagger(e^{j\omega})$$
$$= \frac{1}{L}\sum_{\mu=0}^{L-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{\nu=0}^{L-1}$$
$$\mathsf{E}\Big[e[nL-L+\mu]e[(n-k)L-\nu]\Big]$$
$$\cdot e^{-j((k-1)L+\mu+\nu)\omega} \tag{30}$$

を得る．この関係は，$\mathbf{e}[n]$ が WSS 過程であることより，$n\in\mathbb{Z}$ によらず成立するから，右辺で特に $n=1$ とおき，

$$\frac{1}{L}\sum_{\mu=0}^{L-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{\nu=0}^{L-1}$$
$$\mathsf{E}\Big[e[\mu]e[\mu-((k-1)L+\mu+\nu)]\Big]$$
$$\cdot e^{-j((k-1)L+\mu+\nu)\omega} \tag{31}$$

としてよい．この式の $\mu$ に関する和の各項について考える．任意に固定された整数 $\mu$ $(0\le\mu<L)$ に対し，

$$s := k+\mathsf{LT}(L,\mu+\nu)-1$$
$$t := \mu+\nu-L\,\mathsf{LT}(L,\mu+\nu)$$

とおけば，$k$ が整数全体 $\mathbb{Z}$ を，また，$\nu$ が $0\le\nu<L$ の整数をそれぞれ一度ずつ独立に動くとき，

$$sL+t=(k-1)L+\nu+\mu$$

は，整数全体 $\mathbb{Z}$ の上を一度ずつくまなく動き，$t$ は $0\le t<L$ を満たしている．したがって，式 (31) を

$$= \frac{1}{L}\sum_{\mu=0}^{L-1}\sum_{t=0}^{L-1}\sum_{s\in\mathbb{Z}}$$
$$\mathsf{E}\Big[e[\mu]e[\mu-(sL+t)]\Big]e^{-j(sL+t)\omega}$$
$$= \frac{1}{L}\sum_{\mu=0}^{L-1}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\mathsf{E}\Big[e[\mu]e[\mu-\ell]\Big]e^{-j\ell\omega} \tag{32}$$

と書き直すことができる．フーリエ逆変換により $\ell=0$ の項を取り出すと

$$\frac{1}{2\pi L}\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{\Phi}(e^{j\omega})\mathbf{S_{ee}}(e^{jL\omega})\mathbf{\Phi}^\dagger(e^{j\omega})d\omega$$
$$= \frac{1}{L}\sum_{\mu=0}^{L-1}\mathsf{E}\Big[e[\mu]e[\mu]\Big]$$

となるが，これは式 (29) で $n=1$ としたものと一致している．よって，補題は示された． □

次に，パワースペクトル密度行列 $\mathbf{S_{ee}}(e^{jL\omega})$ と入力及び量子化雑音のパワースペクトル密度との関係を考える．式 (25) に対応し，$\mathbf{S_{ee}}(e^{jL\omega})$ と $\mathbf{S_{pp}}(e^{jL\omega})$ の間に

$$\mathbf{S_{ee}}(e^{jL\omega}) = \Big[\mathbf{I}_L-\mathbf{G}(e^{jL\omega}) \quad -\mathbf{G}(e^{jL\omega})\Big]$$
$$\mathbf{S_{pp}}(e^{jL\omega})\begin{bmatrix}\mathbf{I}_L-\mathbf{G}^\dagger(e^{jL\omega})\\ -\mathbf{G}^\dagger(e^{jL\omega})\end{bmatrix} \tag{33}$$

の関係が成立することが，一般論により示される．更に，式 (26) より，

$$\mathbf{S_{ee}}(e^{jL\omega}) = (\mathbf{I}_L-\mathbf{G}(e^{jL\omega}))\mathbf{S_{yy}}(e^{jL\omega})$$
$$(\mathbf{I}_L-\mathbf{G}^\dagger(e^{jL\omega}))$$
$$+\mathbf{G}(e^{jL\omega})\mathbf{S_{qq}}(e^{jL\omega})\mathbf{G}^\dagger(e^{jL\omega}) \tag{34}$$

を得る．第 1 項は式 (1) のフィルタリング雑音 $e_f[m]$ に対応し，第 2 項は量子化雑音に対する応答 $\widetilde{q}[m]$ に対応する．この式を用いて，補題 3.1 の等式右辺の被積分関数は次のように展開される：

$$\mathbf{\Phi}(e^{j\omega})\mathbf{S_{ee}}(e^{jL\omega})\mathbf{\Phi}^\dagger(e^{j\omega})$$
$$= \mathbf{\Phi}(e^{j\omega})\mathbf{S_{yy}}(e^{jL\omega})\mathbf{\Phi}^\dagger(e^{j\omega}) \tag{35}$$
$$+\mathbf{\Phi}(e^{j\omega})\mathbf{G}(e^{jL\omega})\mathbf{S_{yy}}(e^{jL\omega})$$
$$\mathbf{G}^\dagger(e^{jL\omega})\mathbf{\Phi}^\dagger(e^{j\omega}) \tag{36}$$
$$-\mathbf{\Phi}(e^{j\omega})\mathbf{G}(e^{jL\omega})\mathbf{S_{yy}}(e^{jL\omega})\mathbf{\Phi}^\dagger(e^{j\omega}) \tag{37}$$
$$-\mathbf{\Phi}(e^{j\omega})\mathbf{S_{yy}}(e^{jL\omega})\mathbf{G}^\dagger(e^{jL\omega})\mathbf{\Phi}^\dagger(e^{j\omega}) \tag{38}$$
$$+\mathbf{\Phi}(e^{j\omega})\mathbf{G}(e^{jL\omega})\mathbf{S_{qq}}(e^{jL\omega})$$
$$\mathbf{G}^\dagger(e^{jL\omega})\mathbf{\Phi}^\dagger(e^{j\omega}). \tag{39}$$

以下各項を計算する．
式 (35):　式 (32) と同様の導出で

$$(35) = \sum_{\mu=0}^{L-1}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\mathsf{E}\Big[y[\mu]y[\mu-\ell]\Big]e^{-j\ell\omega} \tag{40}$$

であることが分かるが，$y[m]$ が WSS 過程であることから，$\mu$ に関する和の各項は $\mu$ に依存せず，$S_{yy}(e^{j\omega})$ に等しい．したがって，

$$(35) = LS_{yy}(e^{j\omega}). \tag{41}$$

式 (36): 式 (21) 及び (24) を用いた若干の計算の後,

$$\boldsymbol{\Phi}(e^{j\omega})\mathbf{G}(e^{jL\omega}) = \begin{bmatrix} H(e^{j\omega}) & \mathbf{O}_{1,L-1} \end{bmatrix} \tag{42}$$

を得る．すると $S_{\mathbf{yy}}(e^{j\omega})$ の $(0,0)$ 成分と $|H(e^{j\omega})|^2$ の積を計算して,

$$(36) = \frac{|H(e^{j\omega})|^2}{L}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathsf{E}\Big[y[nL]y[nL-k]\Big] \left(\sum_{r=0}^{L-1} e^{\frac{2\pi jkr}{L}}\right) e^{-jk\omega} \tag{43}$$

と書き直せる（最後の括弧内は $k \in L\mathbb{Z}$ のとき $L$, その他の場合 0 となることに注意）．したがって,

$$(36) = \frac{|H(e^{j\omega})|^2}{L}\sum_{r=0}^{L-1} S_{yy}(e^{j\left(\omega-\frac{2\pi jr}{L}\right)}) \tag{44}$$

を得る．

式 (37) 及び (38): 式 (38) は式 (42) より

$$\begin{aligned}(38) &= -\boldsymbol{\Phi}(e^{j\omega})\mathbf{S}_{\mathbf{yy}}(e^{jL\omega})\begin{bmatrix} H^*(e^{j\omega}) \\ \mathbf{O}_{L-1,1}\end{bmatrix} \\ &= -H^*(e^{j\omega})\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{\mu=0}^{L-1} \\ &\qquad \mathsf{E}\Big[y[nL-\mu]y[nL-\mu-(kL-\mu)]\Big] \\ &\qquad e^{-j(kL-\mu)\omega} \\ &= -H^*(e^{j\omega})S_{yy}(e^{j\omega}).\end{aligned} \tag{45}$$

式 (37) はその複素共役であり

$$(37) = -H(e^{j\omega})S_{yy}(e^{j\omega}). \tag{46}$$

式 (39): 式 (36) と同様に,

$$(39) = \frac{|H(e^{j\omega})|^2}{L}\sum_{r=0}^{L-1} S_{qq}(e^{j\left(\omega-\frac{2\pi jr}{L}\right)}). \tag{47}$$

以上計算した式 (41), (44), (46), (45), (47) の結果を代入して積分することにより,

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_s + \mathcal{E}_q, \tag{48}$$

ただし

$$\mathcal{E}_p := \int_{-\pi}^{\pi} |L - H(e^{j\omega})|^2 S_{yy}(e^{j\omega})\frac{d\omega}{2\pi L^2}$$

$$\mathcal{E}_s := \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 \sum_{r=1}^{L-1} S_{yy}(e^{j\left(\omega-\frac{2\pi jr}{L}\right)})\frac{d\omega}{2\pi L^2}$$

$$\mathcal{E}_q := \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 \sum_{r=0}^{L-1} S_{qq}(e^{j\left(\omega-\frac{2\pi jr}{L}\right)})\frac{d\omega}{2\pi L^2}$$

となる．更に式 (4) を用いると

$$\mathcal{E}_p = \frac{\sigma_w^2}{2\pi L^2}\int_{-\frac{\alpha\pi}{L}}^{\frac{\alpha\pi}{L}} |L - H(e^{j\omega})|^2 d\omega, \tag{49}$$

及び

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_s &= \sum_{r=1}^{L-1}\int_0^{2\pi} S_{yy}(e^{j\left(\omega-\frac{2\pi jr}{L}\right)})\frac{d\omega}{2\pi L^2} \\ &= \frac{\sigma_w^2}{2\pi L^2}\sum_{r=1}^{L-1}\int_{2\pi\frac{r-\alpha/2}{L}}^{2\pi\frac{r+\alpha/2}{L}} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega\end{aligned} \tag{50}$$

を得る．ここで $\mathcal{E}_s$ の計算では $|H(e^{j\omega})|$ の $2\pi$ 周期性と，$S_{yy}(e^{j\left(\omega-\frac{2\pi jr}{L}\right)})$ $(1 \le r \le L-1)$ の台が排他的であることを用いた．これら $\mathcal{E}_p$ 及び $\mathcal{E}_s$ はそれぞれ通過域，阻止域におけるフィルタリング雑音を表している．同様に，$\mathcal{E}_q$ は式 (7) より

$$\mathcal{E}_q = \frac{\sigma_q^2}{2\pi L}\int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega \tag{51}$$

である．基準入力信号 $y[m]$ のサンプル点当りのエネルギーは,

$$\begin{aligned}\mathcal{S} := \mathsf{E}\Big[y[m]^2\Big] &= \int_{-\pi}^{\pi} S_{yy}(e^{j\omega})\frac{d\omega}{2\pi} \\ &= \frac{\sigma_w^2}{2\pi}\int_{-\frac{\alpha\pi}{L}}^{\frac{\alpha\pi}{L}} d\omega = \frac{\alpha\sigma_w^2}{L}\end{aligned}$$

となる．以上まとめて，SNR の周波数領域における表現を

$$\mathrm{SNR} = \frac{\mathcal{S}}{\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{S}}{\mathcal{E}_p + \mathcal{E}_s + \mathcal{E}_q}$$

と書ける．ただし，$\mathcal{S}, \mathcal{E}_p, \mathcal{E}_s, \mathcal{E}_q$ に正規化

$$\begin{bmatrix} S \\ E_p \\ E_s \\ E_q \end{bmatrix} := \frac{\pi L^2}{\sigma_w^2}\begin{bmatrix} \mathcal{S} \\ \mathcal{E}_p \\ \mathcal{E}_s \\ \mathcal{E}_q \end{bmatrix}$$

を行うことにより，より簡単な表示にできる．

正規化後の SNR 理論式は次式となる：

$$\mathrm{SNR}=\frac{S}{E_p+E_s+E_q}, \tag{52}$$

ここに

$$S=\alpha\pi L \tag{53}$$

$$E_p=\int_0^{\frac{\alpha\pi}{L}}|L-H(e^{j\omega})|^2d\omega \tag{54}$$

$$E_s=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{L-1}\int_{2\pi\frac{r-\alpha/2}{L}}^{2\pi\frac{r+\alpha/2}{L}}|H(e^{j\omega})|^2d\omega \tag{55}$$

$$E_q=L\frac{\sigma_q^2}{\sigma_w^2}\int_0^{\pi}|H(e^{j\omega})|^2d\omega \tag{56}$$

である．更に，基準入力信号 $y[m]$ のもととなる白色雑音 $w[m]$ が $(-1,1)$ の範囲の値をとると仮定すれば，式 (8) から，$E_q$ を

$$E_q=L2^{-2b-2}\int_0^{\pi}|H(e^{j\omega})|^2d\omega \tag{57}$$

と小数点以下のビット長 $b$ で具体的に書ける．本章の最後まで，この前提が成立するものとする．

以上導出してきた SNR 理論式を最大化する，理想フィルタとそれがもたらす SNR の上限について考察する．帯域制限係数 $\alpha$ と内挿比 $L$ が与えられたとき，SNR の最大化は，式 (52) の分母

$$E:=E_p+E_s+E_q \tag{58}$$

の最小化に帰着する．式 (57) の積分区間を $[0,\alpha\pi/L)$ と $[\alpha\pi/L,\pi)$ に分け，式 (55) の積分区間と考え併せることで，区間 $[\alpha\pi,2\pi-\alpha\pi/L)$ における $H(e^{j\omega})$ の最善の選択は恒等的に 0 であること，がまず分かる．このときの $E$ は，

$$\int_0^{\frac{\alpha\pi}{L}}|L-H(e^{j\omega})|^2+L2^{-2b-2}|H(e^{j\omega})|^2d\omega \tag{59}$$

となるが，若干の計算により，この積分区間で $H(e^{j\omega})$ が恒等的に $2^{2b+2}L/(2^{2b+2}+L)$ となることが最善の選択と分かる．これらをまとめて，$[0,\pi)$ の範囲で理想フィルタの周波数特性を書くと，

$$H_{\mathrm{ideal}}(e^{j\omega})=\begin{cases}\frac{2^{2b+2}L}{2^{2b+2}+L} & (\omega\in[0,\alpha\pi/L))\\ 0 & (\omega\in[\alpha\pi/L,\pi))\end{cases} \tag{60}$$

となる．すなわち，入力帯域制限の範囲内をゲイン $2^{2b+2}L/(2^{2b+2}+L)$ で通過させ，それ以外の帯域ではイメージ成分及び量子化雑音を完全に抑圧するフィルタが理想フィルタである．この特性は，帯域制限係数 $\alpha$ のために，バンド等分割の意味で理想的な $L$th バンドフィルタの特性とは異なったものになっていることに注意する．この理想フィルタ $H_{\mathrm{ideal}}$ は，SNR 上限値

$$SNR_{\max}=1+L^{-1}2^{2b+2} \tag{61}$$

を与える．

## 4. SNR 理論式のシミュレーションによる検証

前章で導出された周波数領域における SNR 理論式の妥当性検証のため，**2.** の式 (9) で定義された時間域における SNR 定義式の計算機によるシミュレーションとの比較を行った．

シミュレーションの方法は次のとおりである．以下での実数値の演算はすべて浮動小数点数を用いている．

（i） 基準入力信号のシミュレーション

擬似乱数発生器 MT19937 [2] を用い，区間 $(-1,1)$ に値をとる模擬白色雑音系列 $w'[m]$ $(0\le m<M)$ を発生させる．系列長 $M$ は十分大きい値として $M=2^{14}=16384$ とする．$M$ 点 DFT により，$w'[m]$ を $[0,\alpha\pi/L)$ に帯域制限したものを模擬基準入力 $y'[m]$ $(0\le m<M)$ として用いる．

（ii） 量子化

0 捨 1 入により，$y'[m]$ を小数点以下の長さ $b$ ビットに丸める．

（iii） ダウンサンプル，内挿処理

前項の結果に定義どおりのダウンサンプル，アップサンプルを施した後，浮動小数点数で実現した $H(z)$ によりフィルタ処理を行い，内挿出力 $\widehat{y'}[m]$ $(0\le m<M)$ を発生する．

（iv） 信号二乗和，誤差二乗和の算出

$\mathcal{S}':=\sum_{m=0}^{M-1}\widehat{y'}[m]^2$，$\mathcal{E}':=\sum_{m=0}^{M-1}\left(\widehat{y'}[m]-y'[m]\right)^2$ により，この系列に対する信号二乗和，誤差二乗和をそれぞれ算出する．

（v） SNR の算出

異なる $w'[m]$ 10000 系列に関して，前項の $\mathcal{S}',\mathcal{E}'$ の総和をそれぞれとり，結果を $\mathcal{S}'',\mathcal{E}''$ とする．比 $\mathcal{S}''/\mathcal{E}''$ を SNR シミュレーション値 $\mathrm{SNR_{sim}}$ とする．

内挿比 $L=2$，帯域制限係数 $\alpha=0.9$，量子化ビッ

ト数 $b = 7$ のもとで，内挿フィルタの $H(z)$ の次数変化に伴う SNR 理論値と SNR シミュレーション値の変化を図 8 に示す．図で，Theory は SNR 理論値の dB 表示 $10\log_{10}$ SNR を，Simulation は SNR シミュレーション値の dB 表示 $10\log_{10}$ $\mathrm{SNR_{sim}}$ を，それぞれ表し，両者が非常によく一致していることが読み取れる．なお，$H(z)$ としては等リプル FIR ハーフバンドフィルタを用い，SNR 理論値は振幅特性から SNR 理論式 (52) により計算したものである．

## 5. 内挿 SNR 最大化 FIR フィルタ設計法

本章では，**3.** で示した SNR 理論式をもとに，内挿出力 SNR が最大となる，直線位相 FIR フィルタ（Type I）の設計法を提案する．まず **5.1** で，$L$th バンドフィルタの制約を課さない場合の設計法を述べる．**5.2** では $L$th バンドフィルタの制約下での SNR 最大化設計法について述べる．同一フィルタ次数において前者のフィルタが後者のフィルタより SNR の点で優るのは当然であるが，後者のフィルタには乗算器数が少ない（$L = 2$ において約半分）という利点がある．

### 5.1 SNR 最大内挿フィルタの最小二乗設計

**3.** では，内挿比 $L$，入力信号の量子化ビット数 $b$ と帯域制限係数 $\alpha$，そしてフィルタの振幅特性から SNR を求める式 (52) を導出した．**3.** の最後にも述べたとおり，$L, \alpha$ が与えられているとき，SNR 最大化問題は，式 (58)

$$E = E_p + E_s + E_q$$

の最小化問題に帰着する．ここで $E_p$ は通過域フィルタリング雑音，$E_s$ は阻止域フィルタリング雑音，$E_q$ は量子化雑音に対する内挿フィルタの応答のエネルギーであり，それぞれ式 (54)，(55)，(56) に示されている．$E_p, E_s, E_q$ はともに二乗振幅誤差の形であり，誤差関数 $E$ はそれらの和で表されている．

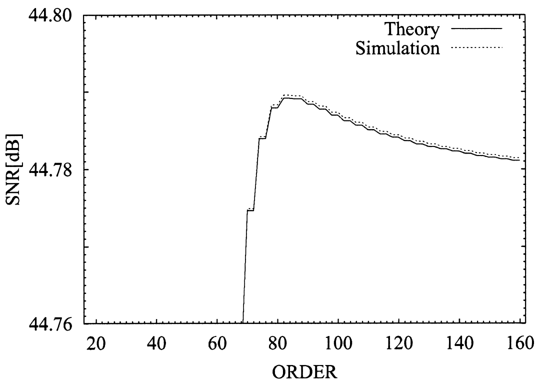


図 8　SNR：理論値とシミュレーション値
Fig. 8　SNR: Theory vs Simulation.

そこで本論文では，$E$ を目的関数として，$E$ が最小となる，すなわち SNR が最大となるフィルタを最小二乗法により求める設計手法を提案する．内挿フィルタ $H(z)$ は直線位相 Type I FIR フィルタとし，その周波数特性を表すため，ベクトル $\boldsymbol{c}$ と係数ベクトル $\boldsymbol{a}$ を次式のようにおく．

$$\boldsymbol{a} = \left[\begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & \cdots & a_N \end{array}\right]^T \tag{62}$$

$$\boldsymbol{c} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & \cos\omega & \cdots & \cos N\omega \end{array}\right]^T \tag{63}$$

ここで

$$a_m = \begin{cases} h[N] & (m = 0) \\ 2h[N+m] & (m = 1, 2, \cdots, N) \end{cases} \tag{64}$$

である．$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}$を用いると，内挿フィルタ $H(z)$ の零位相化 $H_0(z)$ の周波数特性 $H_0(e^{j\omega})$ は

$$H_0(e^{j\omega}) = a_0 + \sum_{m=1}^{N} a_m \cos\omega m$$
$$= \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{a} \tag{65}$$

$$\left|H_0(e^{j\omega})\right|^2 = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{c}\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{a} \tag{66}$$

と表すことができる．これらを式 (54)，(55)，(56) の $E_p, E_s, E_q$ の $H(e^{j\omega}), |H(e^{j\omega})|^2$ に代入することで，

$$\begin{aligned} E_p &= \int_0^{\frac{\pi}{L}\alpha} \left|L - H_0(e^{j\omega})\right|^2 d\omega \\ &= L^2 \int_0^{\frac{\pi}{L}\alpha} d\omega - 2\left(L\int_0^{\frac{\pi}{L}\alpha} \boldsymbol{c}^T d\omega\right)\boldsymbol{a} \\ &\quad + \boldsymbol{a}^T\left(\int_0^{\frac{\pi}{L}\alpha} \boldsymbol{c}\boldsymbol{c}^T d\omega\right)\boldsymbol{a} \end{aligned} \tag{67}$$

$$\begin{aligned} E_s &= \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{L-1}\int_{\frac{\pi}{L}(2r-\alpha)}^{\frac{\pi}{L}(2r+\alpha)} \left|H_0(e^{j\omega})\right|^2 d\omega \\ &= \boldsymbol{a}^T\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{L-1}\int_{\frac{\pi}{L}(2r-\alpha)}^{\frac{\pi}{L}(2r+\alpha)} \boldsymbol{c}\boldsymbol{c}^T d\omega\right)\boldsymbol{a} \end{aligned} \tag{68}$$

$$\begin{aligned} E_q &= L\frac{\sigma_q^2}{\sigma_w^2}\int_0^{\pi} \left|H_0(e^{j\omega})\right|^2 d\omega \\ &= \boldsymbol{a}^T\left(L\frac{\sigma_q^2}{\sigma_w^2}\int_0^{\pi} \boldsymbol{c}\boldsymbol{c}^T d\omega\right)\boldsymbol{a}. \end{aligned} \tag{69}$$

表 1　$\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{g}$ の成分
Table 1　Elements of $\boldsymbol{F}$ and $\boldsymbol{g}$.

$$F_{k,l}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{k+l}\left\{1+\displaystyle\sum_{r=1}^{L-1}\cos\frac{2(k+l)r\pi}{L}\right\}\left\{\sin\frac{(k+l)\alpha\pi}{L}\right\}+\dfrac{1}{k-l}\left\{1+\displaystyle\sum_{r=1}^{L-1}\cos\frac{2(k-l)r\pi}{L}\right\}\left\{\sin\frac{(k-l)\alpha\pi}{L}\right\}\right] & (k\neq l)\\ \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2k}\left\{1+\displaystyle\sum_{r=1}^{L-1}\cos\frac{4kr\pi}{L}\right\}\left\{\sin\frac{2k\alpha\pi}{L}\right\}+F_{0,0}\right] & (k=l,k\neq 0,l\neq 0)\\ \pi\left(\alpha+L\dfrac{\sigma_q^2}{\sigma_w^2}\right) & (k=0,l=0)\end{cases}$$

$$g_k=\begin{cases}\dfrac{L}{k}\sin\dfrac{k\alpha\pi}{L} & (k\neq 0)\\ \alpha\pi & (k=0)\end{cases}$$

ここで，$H(z)$ の代わりに零位相化した $H_0(z)$ を用いたのは，**2.**，図 4 の誤差評価系で，基準入力信号 $y[m]$ に比較して実際の内挿フィルタ $H(z)$ の出力が $N$ の群遅延をもつことに対する補正である．

式 (67)，(68)，(69) から，誤差関数の式 (58) は次の形式

$$E=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{F}\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{a} \tag{70}$$

で書ける．ただし，$\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{g}$ は以下のとおりである：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}\ &=\int_0^{\frac{\pi}{L}\alpha}\boldsymbol{c}\boldsymbol{c}^T d\omega+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{L-1}\int_{\frac{\pi}{L}(2r-\alpha)}^{\frac{\pi}{L}(2r+\alpha)}\boldsymbol{c}\boldsymbol{c}^T d\omega\\ &\quad+L\frac{\sigma_q^2}{\sigma_w^2}\int_0^{\pi}\boldsymbol{c}\boldsymbol{c}^T d\omega \end{aligned}\tag{71}$$

$$\boldsymbol{g}\ =L\int_0^{\frac{\pi}{L}\alpha}\boldsymbol{c}\,d\omega. \tag{72}$$

ここで，行列 $\boldsymbol{F}$ の $k$ 行 $l$ 列 $(k,l=0,1,\cdots,N)$ 成分 $F_{k,l}$ と，ベクトル $\boldsymbol{g}$ の第 $k$ 行 $(k=0,1,\cdots,N)$ 成分 $g_k$ は，表 1 に示すように，解析的に計算できる．なお，基準入力信号 $y[m]$ を作る際のもとである白色雑音 $w[m]$ が $(-1,1)$ の実数値をとるという仮定のもとで，式 (8) より，

$$F_{0,0}=\pi\left(\alpha+\frac{L}{2^{2b+2}}\right) \tag{73}$$

とより具体的に書ける．

行列 $\boldsymbol{F}$ は正定符号の対称行列であるので，誤差関数 $E$ が最小となるとき，$\boldsymbol{F},\boldsymbol{g},\boldsymbol{a}$ には次式の関係が成り立つ [11]．

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{g} \tag{74}$$

したがって，式 (74) の線形方程式を解くことで，誤差関数 $E$ が最小となるフィルタ係数ベクトル $\boldsymbol{a}$ が求まる．

以上をまとめると，提案法における設計仕様は，

- 内挿比 $L$
- 入力信号帯域制限係数 $\alpha$
- 入力信号小数点以下量子化ビット数 $b$
- フィルタ次数 $2N$

となり，これらを式 (71)，(72) に代入し，式 (74) の線形方程式を解くことで，SNR が最大となるフィルタ係数が得られる．

### 5.2　$L$th バンド制約下での SNR 最大化設計

FIR ハーフバンドフィルタは，約半数の係数値が 0 となるため，一般的な FIR フィルタと比較して約半分の乗算器数で実現可能である．ここでは，前節の設計法に $L$th バンドフィルタの制約を加えた変更版の設計法を示す．$L$th バンドフィルタのインパルス応答 $h[m]$ は，次式のように制約される．

$$h[N+rL]=0 \qquad (r=\pm1,\pm2,\cdots) \tag{75}$$

ここで，インパルス応答中央 $h[N]$ の値については，SNR 最適化のために振り向け，特に制約を課さないものとする．

式 (75) の制約から，式 (62) に示した係数ベクトル $\boldsymbol{a}$ の第 $rL$ 行成分 $a_{(rL)}$ は，

$$a_{(rL)} = 0 \qquad (r = 1, 2, 3, \cdots) \tag{76}$$

と制限される一方，式 (72) の $\boldsymbol{g}$ の第 $rL$ 行成分に対し

$$g_{(rL)} = 0 \qquad (r = 1, 2, 3, \cdots) \tag{77}$$

が自動的に成り立つ．そこで，式 (62) ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対し，その第 $rL$ 行を間引いたベクトル

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{(rL-1)} & a_{(rL+1)} & \cdots & a_N \end{bmatrix}^T$$

を $\boldsymbol{a}'$ とし，$\boldsymbol{g}$ に対して $\boldsymbol{g}'$ を同様に定義，そして，式 (71) の行列 $\boldsymbol{F}$ から第 $rL$ 行と第 $rL$ 列を間引いて得られた行列を $\boldsymbol{F}'$ とし，線形方程式

$$\boldsymbol{F}'\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{g}' \tag{78}$$

を解くことで，SNR を最大化する $L$th バンドフィルタ係数ベクトル $\boldsymbol{a}'$ が求まる．

## 6. SNR 性能比較及び設計例

本章では，前節で提案した SNR 最大化内挿フィルタと従来法による内挿フィルタの SNR 性能比較を行う．また，提案法による設計例のいくつかを示す．

### 6.1 SNR 性能比較

内挿比 $L = 2$，帯域制限係数 $\alpha = 0.9$，量子化ビット数 $b = 7$ の条件下で，**5.1** の手法で設計した SNR 最大化内挿フィルタ，**5.2** の手法により設計した SNR 最大化ハーフバンド内挿フィルタ，及び従来法の，フィルタ次数ごとの SNR 性能比較を行った．従来法としては，等リプルハーフバンドフィルタを，次数ごとに SNR が最大となるような通過域端周波数を探索して設計したものを用いている．（通過域端周波数を変えつつ設計を繰り返す必要があるのも，通過域及び阻止域の仕様を与える従来型設計の短所の一つである）SNR 性能比較結果を，図 9 に示す．SNR は **3.** で導出した SNR 理論式を，内挿フィルタの振幅特性を用いて計算し，$10\log_{10}$ を施して [dB] 表示としている．横軸はフィルタ次数である．Proposed，Proposed（halfband），Conventional はそれぞれ，**5.1** の SNR 最大化フィルタ，**5.2** の SNR 最大化ハーフバンドフィルタ，従来法を表している．また，$SNR_{\max}$ は式 (61) で与えた SNR の上限である．まず，Conventional は，次数増大とともに必ずしも SNR を改善していないことが分かる；80 次付近を境に，SNR は停留，むしろ微減の傾向にある．一方で Proposed の SNR は，次数増加とともに $SNR_{max}$ に近づくことが分かる．また，次数 80 における Proposed は，乗算器数同程度の次数 160 の Conventional より SNR で優ることに注意する．Conventional では次数増加が SNR 改善につながらないため，同一乗算器数における比較をしても，Proposed と Conventional の差は乗算器数増大とともに開いていく．Proposed（halfband）については，次数 100 次付近までは Conventional よりわずかに優る程度の SNR であるが，より高次に向かうにつれ，SNR は改善する．ただし，ハーフバンド制約のために改善は Proposed よりも遅い．

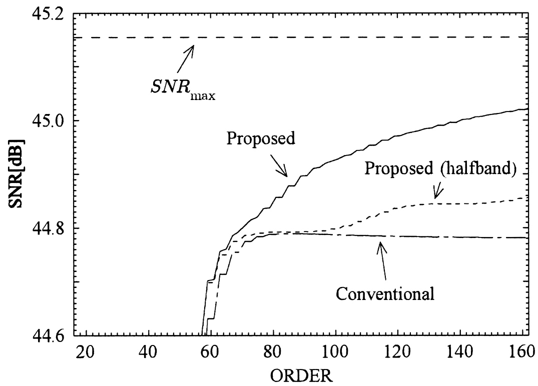


図 9 SNR 比較
Fig. 9 SNR comparison.

次数ごとの出力雑音を，量子化雑音 $E_q$，通過域フィルタリング雑音 $E_p$，阻止域フィルタリング雑音 $E_s$ に分けて比較したものを図 10，図 11，図 12 にそれぞれ示す．図 11 と図 12 の縦軸は対数表示である．まず，次数 40 次程度以上では，$E_q$ は大きさにおいて $E_p$ や $E_s$ を圧倒していることに注意する．

Conventional の場合，高次になるにつれて通過域・阻止域のリプルが小さくなることが原因で，次数 100 程度までの間フィルタリング雑音 $E_p, E_s$ を改善する．一方で，量子化雑音 $E_q$ については次数増加とともにむしろ増える傾向にある．従来法によるフィルタの遷移域の振幅特性は，次数が高くなるにつれて急しゅんになるが，これが $[\alpha\pi/2, \pi/2)$ の量子化雑音を低減するのに適した特性ではないためである．

一方，Proposed においては，低次（次数 60 次程度まで）従来法と同様な $E_q, E_p, E_s$ の改善を見せた後，それより高い次数ではフィルタリング誤差 $E_p, E_s$ よりむしろ，量子化雑音 $E_q$ をより減少させる傾向にあることが分かる．Proposed の通過域フィルタリング

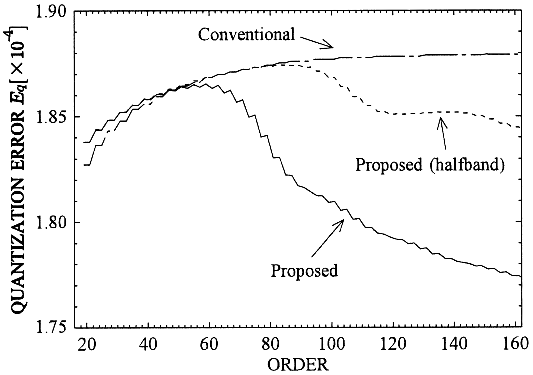


図 10　次数 vs 量子化雑音 $E_q$
Fig. 10　Order vs quantization noise $E_q$.

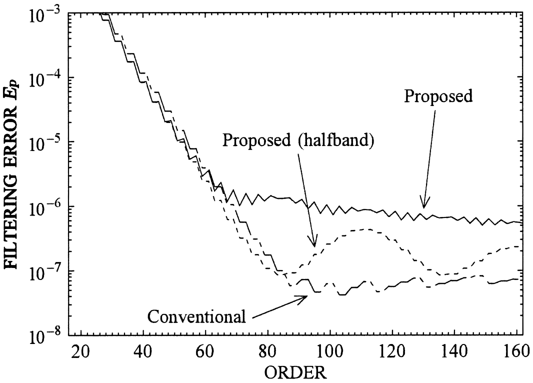


図 11　次数 vs 通過域フィルタリング雑音 $E_p$
Fig. 11　Order vs passband-filtering noise $E_p$.

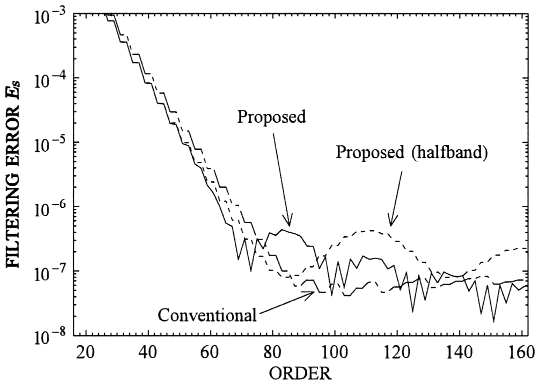


図 12　次数 vs 阻止域フィルタリング雑音 $E_s$
Fig. 12　Order vs stopband-filtering noise $E_s$.

誤差 $E_p$ は次数 60 次程度以上で従来法に劣るが，より絶対値の大きい量子化雑音 $E_q$ をよりよく抑圧し，総合的な雑音を減少させていることが分かる．

Proposed（halfband）は，次数の増加に伴う長い周期の波打ちを呈しつつ，Proposed と Conventional の中間的な性質を示している．

### 6.2　内挿比 $L = 2$ の設計例

提案法による内挿フィルタの振幅特性の特徴を設計例を通じて示す．内挿比 $L = 2$，帯域制限係数 $\alpha = 0.9$，量子化ビット数 $b = 7$ の条件は **6.1** と共通である．

図 13 はフィルタ次数 160 としたときの，**5.1** の SNR 最大化フィルタ（Proposed），**5.2** の SNR 最大化ハーフバンドフィルタ（Proposed（halfband）），従来法（Conventional）の振幅特性の比較である．横軸は正規化周波数 $\omega/2\pi$ であり，量子化雑音のみが存在する帯域 $[\frac{\alpha}{4}, \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{4})$ の両端が横軸上の 1/4 の左右のノッチで示されている．この帯域は Conventional にとって遷移域であり，振幅特性が制御されていないが，Proposed はこの帯域でのゲインを，リプルはあるものの 0 に近づけていることが分かる．また，Proposed(halfband) は，ハーフバンド制約下でこの帯域でのゲインを小さく抑えている．フィルタ次数 40，80，160 における Proposed，及び Proposed（halfband）の振幅特性を，図 14 及び図 15 にそれぞれ示す．図 14 より，Proposed は次数増大とともに，$\omega = \alpha\pi/2$ 付近における振幅特性がより急しゅんとなり，（ある意味で）**3.** の式 (60) の理想振幅特性に近づくような挙

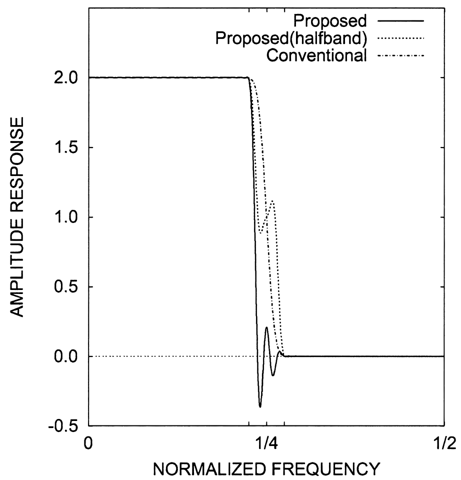


図 13　次数 160 での振幅特性の比較
Fig. 13　Comparison of amplitude responses at order 160.

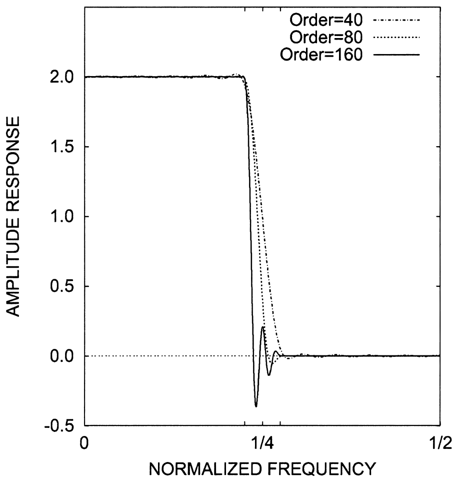


図 14　次数 40, 80, 160 に対する振幅特性：Proposed
Fig. 14　Amplitude responses for order 40, 80, 160: Proposed.

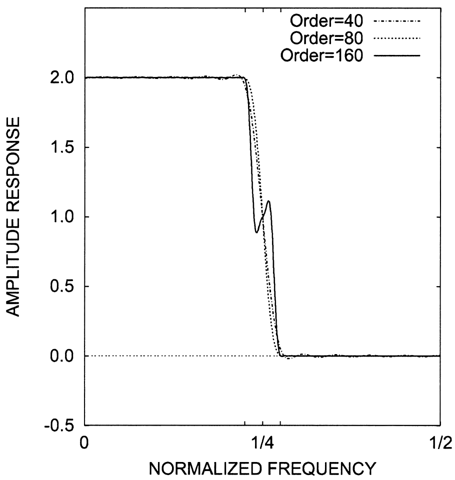


図 15　次数 40, 80, 160 に対する振幅特性：Proposed (halfband)
Fig. 15　Amplitude responses for order 40, 80, 160: Proposed(halfband).

動を示している．図 15 においても次数増大とともに $\omega = \alpha\pi/2$ 付近での振幅特性が急しゅんになっているが，ハーフバンド制約のために量子化雑音のみが存在する帯域において，振幅特性は 1 付近を振動する．

### 6.3　内挿比 $L = 5$ の設計例

提案法は一般の $L$ に対し適用可能であるが，ここでは内挿比 $L = 5$，帯域制限係数 $\alpha = 0.8$，量子化ビット数 $b = 7$ の条件における一例のみを示す．図 16 は次数 298 での SNR 最大化フィルタ（Proposed），及び SNR 最大化 5th-band フィルタ（Proposed（5th-band））の振幅特性である．量子化雑音のみが存在する帯域は正規化周波数 $\omega/2\pi$ において，$[0.08, 0.12), [0.28, 0.32), [0.48, 0.5)$ である．Proposed はこれらの帯域でリプルをもちつつも振幅特性は 0 に近く，Proposed（5th-band）ではこれらの帯域で，振幅特性は 1 付近を振動している．

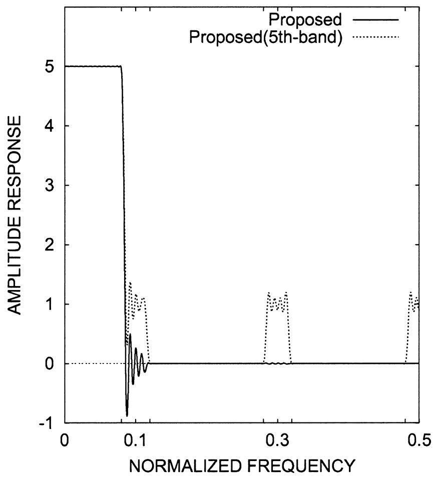


図 16　5 倍内挿フィルタの振幅特性
Fig. 16　Amplitude responses of 5-interpolation filters.

## 7. む す び

量子化された帯域制限信号に対する $L$ 倍内挿フィルタの出力 SNR を解析し，内挿フィルタの周波数特性で記述された理論式を導出した．また，その妥当性をシミュレーションで確認した．更に，SNR を最大化する内挿フィルタの設計法を提案した．設計法は，Type I FIR フィルタの範囲での SNR 最大化設計，それに $L$th バンドフィルタの制約を加えた場合での SNR 最大化設計のそれぞれがあり，いずれも解析的に表示できる係数行列をもつ線形方程式の求解に帰着され，任意の内挿比 $L$ に対して容易に設計が可能である．提案法によるフィルタは，量子化雑音のみが存在する帯域におけるゲインを抑えることにより，従来の通過域及び阻止域のみを考慮したフィルタでは次数の犠牲のもとでも達成できなかった SNR を達成している．

## 文　　献

[1]　貴家仁志，マルチレート信号処理，昭晃堂，1995.
[2]　M. Matsumoto and T. Nishimura, "Mersenne twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator," ACM Trans. Model. Comput. Simul., vol.8, no.1, pp.3–30, Jan. 1998.

[3] J.H. McClellan, T.W. Parks, and L.R. Rabiner, "A computer program for designing optimum FIR linear phase digital filters," IEEE Trans. Audio Electroacoust., vol.AU-21, no.6, pp.506–526, Dec. 1973.

[4] 相良岩男，AD/DA 変換回路入門，日刊工業新聞社，1991.

[5] V.P. Sathe and P.P. Vaidyanathan, "Effects of multirate systems on the statistical properties of random signals," IEEE Trans. Signal Process., vol.41, no.1, pp.131–146, Jan. 1993.

[6] 佐藤　浩，吉川敏則，"量子化入力に適した FIR ハーフバンドフィルタの提案とその評価，" 信学技報，CAS94-59, Nov. 1994.

[7] 武部　幹，ディジタルフィルタの設計，東海大学出版会，1988.

[8] J. Tuqan and P.P. Vaidyanathan, "Oversampling PCM techniques and optimum noise shapers for quantizing a class of nonbandlimited signals," IEEE Trans. Signal Process., vol.47, no.2, pp.389–407, Feb. 1999.

[9] P.P. Vaidyanathan and T.Q. Nguyen, "A "trick" for the design of FIR half-band filters," IEEE Trans. Cirucits Syst., vol.CAS-34, no.3, pp.297–300, March 1987.

[10] 渡辺洋一，吉川敏則，"帯域制限信号に適した内挿フィルタの構成方法に関する一提案，" 信学技報，CAS92-72, Nov. 1992.

[11] 張　熙，岩倉　博，"制約条件を有する最小 2 乗近似直線位相 FIR フィルタの設計，" 電気通信大学紀要，vol.4, no.2, pp.225–233, Dec. 1991.


（平成 15 年 12 月 19 日受付，16 年 3 月 18 日再受付，9 月 1 日最終原稿受付）

**茂木　孝一**　（正員）

2001 長岡技術科学大学電気・電子システム工学課程卒．2003 同大大学院修士課程電気・電子システム工学専攻了，修士（工学）．在学中はディジタル信号処理の研究に従事．2003 より現在まで日本精機（株），建設機械計器のシステム設計等に従事．

**吉川　敏則**　（正員）

昭 46 東工大・電子卒．昭 51 同大大学院博士課程了．工博．埼玉大工学部助手，同大講師を経て，昭 58 より長岡技術科学大学助教授．現在，同大教授．ディジタル信号処理，コンピュータのソフトウェア応用等の研究に従事．IEEE 会員．

**張　　熙**　（正員）

1984 中国南京航空航天大学電子工程系卒．1993 電通大大学院電子情報学専攻博士課程了．博士（工学）．1984 南京航空航天大学助手．1993 電通大助手．1996 長岡技科大助教授．現在，電通大助教授．2000 年 9 月～2001 年 6 月文部省在外研究員（米国マサチューセッツ工科大学）．1987 年度中国国家科技進歩三等賞，2002 年度第 4 回 LSI IP デザイン・アワードチャレンジ賞各受賞．2002 年 4 月～2004 年 3 月 IEEE Signal Processing Letters Associate Editor．ディジタル信号処理，画像処理，フィルタ設計理論，近似理論，ウェーブレット，画像圧縮などの研究に従事．IEEE Senior Member.

**武井　由智**　（正員）

1990 東工大・理・数学卒．1992 同大大学院修士課程数学専攻了，修士（理学），2000 同大学院博士課程物理情報工学専攻了，博士（工学）．1992 より 1995 まで川鉄情報システム（株）．1999 より 2000 まで東工大工学部助手，2000 より 2004 まで長岡技科大工学部助手．現在，同大工学部助教授．理論計算機科学，ディジタル信号処理に関する研究に従事．LA, SIAM, ACM, AMS, IEEE 各会員．