

通過域平坦な阻止域等リプル振幅特性をもつ平坦な群遅延 IIR フィルタの一設計法

張 熙^{†a)} 相澤 正智^{††} 吉川 敏則^{††}

Design of Flat Delay IIR Filters with Flat Passband and Equiripple Stopband Magnitude Responses

Xi ZHANG^{†a)}, Masatomo AIZAWA^{††}, and Toshinori YOSHIKAWA^{††}

あらまし 本論文では、通過域に平坦な群遅延特性を有する通過域平坦阻止域等リプル IIR フィルタの一設計法を提案する。最初に、通過域における振幅と群遅延特性の平坦条件を示し、その条件からフィルタ係数に関する線形方程式を導出する。そして、阻止域の指定された周波数点に零点を配置することにより、通過域に平坦な振幅と群遅延かつ阻止域に指定された零点を有する IIR フィルタが設計できる。次に、阻止域に零点を等間隔に配置して得られたフィルタ係数を初期値とし、Remez アルゴリズムを阻止域に適用する。このフィルタ設計問題は行列の固有値問題として定式化できるので、固有値問題を解いて、フィルタ係数が得られる。更に、固有値問題の反復処理により、阻止域に等リプル振幅特性を達成することができる。最後に、設計例として、低域通過、帯域通過、帯域阻止フィルタを示す。

キーワード IIR フィルタ, 等リプル特性, 平坦特性, Remez アルゴリズム, 固有値問題

1. ま え が き

信号処理の多くの応用において、平坦な群遅延特性を有するフィルタが必要である。従来、FIR フィルタは、フィルタ係数に对称条件を課すことで、完全線形位相特性が容易に得られるから、よく使われてきた [1]。しかし、急しゅんな振幅特性を得るためには、高次 FIR フィルタが必要となる。FIR フィルタに比べ、IIR フィルタは同程度の周波数特性を低次数で実現できる。既存のアナログフィルタから、 s - z 変換により IIR フィルタを得る方法があるが、得られる IIR フィルタは、線形位相をもたない問題点がある [1]。そのため、直接 z 領域で IIR フィルタを設計する必要があるが、これまで数多くの設計法が提案されてきた [5], [8], [9], [11] ~

[14]。通過域平坦阻止域等リプル振幅特性は、通過域振幅のリプルに起因するリンクの低減や阻止域減衰量の最大化のため、望ましい特性である。これらのフィルタ設計に関しては、いくつかの方法が既に提案されている [4] ~ [6], [10] ~ [12], [14]。文献 [12] は、IIR フィルタの振幅特性のみの設計であり、群遅延特性については考慮されなかった。文献 [5] と [11] では、分母多項式で通過域の群遅延特性を最大平坦化してから、対称な分子多項式を用いて、フィルタの振幅特性の近似を行った。また、文献 [14] では、阻止域平坦通過域等リプル特性の IIR フィルタを設計し、遅延器と並列接続することにより、平坦な群遅延特性をもつフィルタを得るが、結果として得られた群遅延は整数に限定される。通信、アレー処理や音声処理等の応用では、非整数遅延フィルタも必要である [7]。

本論文では、通過域に平坦な振幅と平坦な群遅延特性、阻止域に等リプル振幅特性を有する IIR フィルタの一設計法を提案する。まず、通過域における振幅と群遅延特性の平坦条件を示し、両者を同じ平坦度 に設定することで、文献 [2] に指摘された通過域端における位相ひずみという問題があるが、フィルタ係数

[†] 電気通信大学情報通信工学科, 調布市
Department of Information and Communication Engineering, The University of Electro-Communications, 1-5-1 Chofugaoka, Chofu-shi, 182-8585 Japan

^{††} 長岡技術科学大学工学部電気系, 長岡市
Department of Electrical Engineering, Nagaoka University of Technology, 1603-1 Kamitomiokamachi, Nagaoka-shi, 940-2188 Japan

a) E-mail: xiz@ice.uec.ac.jp

に関する線形方程式を導出できる．そして，阻止域の指定された周波数点に零点を配置することにより，通過域に平坦振幅と平坦群遅延特性をもち，かつ阻止域に指定された零点をもつ IIR フィルタが設計できる．次に，阻止域に零点を等間隔に配置して得られたフィルタ係数を初期値とし，Remez アルゴリズムを用いて，一般化固有値問題の形で定式化を行う [13]．よって，誤差が最小になるような固有値に対応する固有ベクトルがフィルタ係数となる．更に，この固有値問題の反復処理により，阻止域の等リプル振幅特性を達成することができる．本設計法では，整数のみならず非整数遅延特性も実現できる．最後に，低域通過，帯域通過と帯域阻止フィルタの設計例を示す．

2. IIR デジタルフィルタ

IIR フィルタの周波数特性 $H(e^{j\omega})$ は

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{n=0}^N a_n e^{-jn\omega}}{\sum_{m=0}^M b_m e^{-jm\omega}} \quad (1)$$

である．ここで， N, M は分子と分母の次数であり，フィルタ係数 a_n, b_m は実数で， $b_0 = 1$ である．

本論文では，通過域に平坦と阻止域に等リプル振幅特性を有するフィルタの設計について考える．まず，通過域における振幅特性の平坦条件は

$$\left. \frac{\partial^i |H(e^{j\omega})|}{\partial \omega^i} \right|_{\omega=\omega_{p0}} = \begin{cases} 1 & (i = 0) \\ 0 & (i = 1, 2, \dots, K_m - 1) \end{cases} \quad (2)$$

で与えられる．ここで， ω_{p0} は通過域に指定された周波数点であり， K_m は振幅特性の平坦度を表すパラメータである．また，阻止域において，誤差関数 $E(\omega)$ を次式のように定義する．

$$E(\omega) = W(\omega)[H(e^{j\omega}) - H_d(e^{j\omega})] \quad (3)$$

ここで， $H_d(e^{j\omega})$ は所望周波数特性で，一般に阻止域では 0 である．また， $W(\omega)$ は重み関数であり，本論文では，簡単化のため， $W(\omega) = 1$ とする．阻止域における設計目標は，誤差関数 $E(\omega)$ の最大振幅を最小化することであり，すなわち，

$$\text{minimize} \{ \max_{\omega} |E(\omega)| \} \quad (\omega \in \text{stopband}) \quad (4)$$

となる．また，通過域において，群遅延特性 $\tau(\omega)$ に対し以下の平坦条件を課す．

$$\left. \frac{\partial^i \tau(\omega)}{\partial \omega^i} \right|_{\omega=\omega_{p0}} = \begin{cases} \tau_0 & (i = 0) \\ 0 & (i = 1, 2, \dots, K_g - 2) \end{cases} \quad (5)$$

ここで， τ_0 は所望の定遅延で，文献 [14] と異なり，実数とする．また， K_g は群遅延特性の平坦度を表すパラメータである．以下， $K = K_m = K_g$ と限定する．

3. 低域通過フィルタの設計

低域通過フィルタの所望周波数特性は

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\tau_0\omega} & (0 \leq \omega \leq \omega_p) \\ 0 & (\omega_s \leq \omega \leq \pi) \end{cases} \quad (6)$$

で与えられる．ここで， ω_p, ω_s はそれぞれ通過域と阻止域端周波数である．

3.1 通過域の平坦条件

通過域における振幅と群遅延特性の平坦条件は式 (2) と (5) に与えられている．低域通過フィルタの場合， $\omega_{p0} = 0$ である．式 (1) から，

$$\hat{H}(e^{j\omega}) = \frac{H(e^{j\omega})}{e^{-j\tau_0\omega}} = \frac{\sum_{n=0}^N a_n e^{-j(n-\tau_0)\omega}}{\sum_{m=0}^M b_m e^{-jm\omega}} \quad (7)$$

と構成すると， $\hat{H}(e^{j\omega})$ の振幅特性 $|\hat{H}(e^{j\omega})|$ と群遅延特性 $\hat{\tau}(\omega)$ に対し，式 (2) と式 (5) の平坦条件は

$$\left. \frac{\partial^{2i} |\hat{H}(e^{j\omega})|}{\partial \omega^{2i}} \right|_{\omega=0} = \begin{cases} 1 & (i = 0) \\ 0 & (i = 1, 2, \dots, K_1) \end{cases} \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial^{2i} \hat{\tau}(\omega)}{\partial \omega^{2i}} \right|_{\omega=0} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, K_2) \quad (9)$$

となる．ここで， K が偶数の場合， $K_1 = K_2 = K/2 - 1$ ，また， K が奇数の場合， $K_1 = (K - 1)/2$ ， $K_2 = (K - 3)/2$ となる．式 (8) と (9) の平坦条件は次式と等価である（付録参照）．

$$\left. \frac{\partial^i \hat{H}(e^{j\omega})}{\partial \omega^i} \right|_{\omega=0} = \begin{cases} 1 & (i = 0) \\ 0 & (i = 1, 2, \dots, K - 1) \end{cases} \quad (10)$$

式 (10) から，式 (7) の分子と分母をそれぞれ $A(\omega)$ ，

$B(\omega)$ とすれば,

$$\left. \frac{\partial^i A(\omega)}{\partial \omega^i} \right|_{\omega=0} = \left. \frac{\partial^i B(\omega)}{\partial \omega^i} \right|_{\omega=0} \quad (11)$$

が導かれ [11], 以下の K 個の線形方程式が得られる.

$$\sum_{n=0}^N a_n (n - \tau_0)^i - \sum_{m=0}^M b_m m^i = 0 \quad (12)$$

ただし, $i = 0, 1, \dots, K-1$ である. また, $b_0 = 1$ であるので, 式 (12) は非同次方程式となる.

3.2 指定された周波数点での零点配置

通過域の平坦特性に使われたフィルタの自由度は K で, 残りの自由度は $J = N + M + 1 - K$ である. これらの自由度をすべて阻止域のために使う. 阻止域の指定された周波数点に J 個の零点を配置する. ただし, $J \leq N$ である必要がある. これらの零点すべてを $\omega = \pi$ におくと, 最大平坦フィルタとなる. 本論文では, 阻止域の等リプル特性を目標とするため, まず等間隔に零点を阻止域に配置した初期フィルタを考える. 実数係数のフィルタから, これらの零点は互いに複素共役関係にあるので, 図 1 のように, J が偶数の場合, $L = \frac{J}{2}$ 個の零点 $\hat{\omega}_l$ ($\omega_s < \hat{\omega}_0 < \dots < \hat{\omega}_{L-1} < \pi$), J が奇数の場合, $L = \frac{J+1}{2}$ 個の $\hat{\omega}_l$ ($\omega_s < \hat{\omega}_0 < \dots < \hat{\omega}_{L-1} = \pi$) を配置する. 式 (1) から,

$$\sum_{n=0}^N a_n e^{\pm jn\hat{\omega}_l} = 0 \quad (l = 0, 1, \dots, L-1) \quad (13)$$

が得られ, 更に実部と虚部に分けると, 以下の線形方程式となる.

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^N a_n \cos(n\hat{\omega}_l) = 0 \\ \sum_{n=0}^N a_n \sin(n\hat{\omega}_l) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

ここで, J が偶数の場合, 式 (14) の方程式の数は実部と虚部ともに L となる. また, J が奇数の場合の方程式の数は, $\hat{\omega}_{L-1} = \pi$ なので, 実部は L , 虚部は $L-1$ となり, どちらの場合も合わせて, J 個の方程式になる. よって, 通過域の平坦条件から導出された式 (12) と式 (14) の線形方程式を解くことにより, フィルタ係数が得られ, 通過域に平坦振幅と群遅延特性かつ阻止域に指定された零点 $\hat{\omega}_l$ ($0 \leq l \leq L-1$) をもつ IIR フィルタが設計できる.

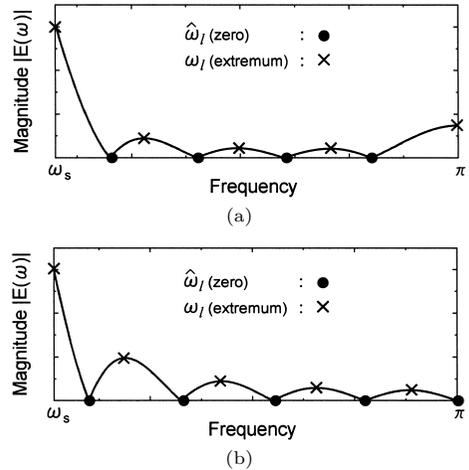


図 1 低域通過フィルタの初期零点の配置
(a) J が偶数の場合, (b) J が奇数の場合
Fig. 1 Location of initial zeros for lowpass filters.
(a) even J , (b) odd J .

3.3 Remez アルゴリズムによる定式化

阻止域等リプル振幅化のため, 等間隔に零点を阻止域に配置して得られたフィルタ係数を用いて, 誤差関数 $E(\omega)$ を計算し, J が偶数の場合は $L+1$ 個, 奇数の場合は L 個の極値周波数点 ω_l とその位相 $\theta(\omega_l)$ を求める. 得られた極値周波数点 ω_l において, Remez アルゴリズムを適用し, 誤差関数の振幅が等しくなるよう定式化する [13].

$$E(\omega_l) = H(e^{j\omega_l}) - H_d(e^{j\omega_l}) = \delta e^{j\theta(\omega_l)} \quad (15)$$

式 (15) に式 (1) と (6) を代入し, 以下の式が得られる.

$$\sum_{n=0}^N a_n e^{-jn\omega_l} = \delta \sum_{m=0}^M b_m e^{-j\{m\omega_l - \theta(\omega_l)\}} \quad (16)$$

そして, 式 (16) を実部と虚部に分けると,

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^N a_n \cos(n\omega_l) = \delta \sum_{m=0}^M b_m \cos\{m\omega_l - \theta(\omega_l)\} \\ \sum_{n=0}^N a_n \sin(n\omega_l) = \delta \sum_{m=0}^M b_m \sin\{m\omega_l - \theta(\omega_l)\} \end{cases} \quad (17)$$

となる. ここで, 式 (17) の方程式の数は, J が奇数の場合, 実部と虚部ともに L となる. J が偶数の場合は, $\omega_L = \pi$ なので, 方程式の数は実部で $L+1$, 虚部で L となり, どちらの場合も合わせて, $J+1$ 個の

方程式となる．したがって，式 (12) と (17) を行列で表すと，次式のような一般化固有値問題に帰着することができる．

$$P\vec{x} = \delta Q\vec{x} \quad (18)$$

ここで， $\vec{x} = [a_0, a_1, \dots, a_N, b_0, b_1, \dots, b_M]^T$ ，また行列 P と Q の要素 P_{uv} ， Q_{uv} は，

$$P_{uv} = \begin{cases} (v - \tau_0)^u & (0 \leq u \leq K-1, 0 \leq v \leq N) \\ -(v - N - 1)^u & (0 \leq u \leq K-1, N+1 \leq v \leq N+M+1) \\ \cos(v\omega_{u-K}) & (K \leq u \leq K+L-1, 0 \leq v \leq N) \\ \sin(v\omega_{u-K-L}) & (K+L \leq u \leq K+J, 0 \leq v \leq N) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$$Q_{uv} = \begin{cases} \cos\{(v - N - 1)\omega_{u-K} - \theta(\omega_{u-K})\} & (K \leq u \leq K+L-1, N+1 \leq v \leq N+M+1) \\ \sin\{(v - N - 1)\omega_{u-K-L} - \theta(\omega_{u-K-L})\} & (K+L \leq u \leq K+J, N+1 \leq v \leq N+M+1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

である．よって， P と Q は正方行列となり，式 (18) の固有値問題を解くことができる．そして，得られた固有値のうち，誤差関数の振幅が最小となるような固有値，すなわち，絶対値最小で実数の δ を求め，その δ に対応する固有ベクトルをフィルタ係数とする．次に，得られたフィルタ係数から誤差関数を計算し，新たな極値周波数点 Ω_l とその位相 $\theta(\Omega_l)$ を求める．その後， $\omega_l = \Omega_l$ とし，繰り返し式 (18) の固有値問題を解く．最終的に Ω_l と ω_l の差が許容値より小さくなるまで反復計算を行う．また， $M = 0$ のとき，すなわち，FIR フィルタの場合には，式 (18) に $b_0 = 1$ を代入することで，式 (18) は線形方程式になる．よって，この線形方程式を解いて，FIR フィルタも簡単に設計できる．

3.4 設計アルゴリズム

(1) 分子と分母の次数 N ， M ，平坦度 K ，所望の遅延 τ_0 ，阻止域端周波数 ω_s を与える．

(2) 阻止域に L 個の初期零点 $\hat{\omega}_l$ を図 1 のように配置する．

(3) 式 (12) と (14) の線形方程式を解き，初期フィルタ係数 a_n ， b_m を求め， $E(\omega)$ から極値周波数点 ω_l とその位相 $\theta(\omega_l)$ を求める．

(4) 行列 P ， Q を計算し，式 (18) の固有値問題を解き，フィルタ係数 a_n ， b_m を求める．

(5) 得られた a_n ， b_m を用いて， $E(\omega)$ の極値周波数点 Ω_l とその位相 $\theta(\Omega_l)$ を求める．

(6) $|\Omega_l - \omega_l| < \varepsilon$ を満たすならば終了．満たさない場合は次へ進む．ただし， ε は与えられた収束許容値であり，一般に $\varepsilon = 10^{-8}$ である．

(7) $\omega_l = \Omega_l$ として，4. へ戻る．

文献 [13] に示されたように，本設計アルゴリズムの収束性は必ず保証されるとは限らず，与えられた初期値に大きく依存する．本論文では，阻止域に零点を等間隔に配置して得られたフィルタを初期値としたため，実際の設計例ではわずかに数回の反復計算で収束することが確認できた．また，収束しない場合は，一つの選択肢としてより良い初期値を選ぶ．例えば，等間隔ではなく，カットオフ周波数付近でより多くの零点を配置することより，等リプル特性に近い初期値を得る．

以上，低域通過フィルタの設計について述べたが，高域通過フィルタも同様に設計できる．また，低域通過フィルタを設計し，得られた伝達関数に z を $-z$ で置き換えることより，高域通過フィルタが得られる．そのため，本論文では，高域通過フィルタの設計については省略する．

4. 帯域通過フィルタの設計

ここでは，帯域通過フィルタの設計について考える．帯域通過フィルタの所望周波数特性は

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j(\tau_0\omega + \theta_0)} & (\omega_{p1} \leq \omega \leq \omega_{p2}) \\ 0 & (0 \leq \omega \leq \omega_{s1}, \omega_{s2} \leq \omega \leq \pi) \end{cases} \quad (19)$$

である．ここで， ω_{p1} ， ω_{p2} ， ω_{s1} ， ω_{s2} はそれぞれ通過域と阻止域端周波数で， θ_0 は指定された位相オフセットである．

4.1 通過域の平坦条件

帯域通過フィルタの通過域における平坦条件は，式 (2) と (5) に与えられている．ただし， $\omega_{p1} \leq \omega_{p0} \leq \omega_{p2}$ である．同様に，次式のように $\hat{H}(e^{j\omega})$ を構成する．

$$\hat{H}(e^{j\omega}) = \frac{H(e^{j\omega})}{e^{-j(\tau_0\omega + \theta_0)}} = \frac{\sum_{n=0}^N a_n e^{-j\{(n-\tau_0)\omega - \theta_0\}}}{\sum_{m=0}^M b_m e^{-j m \omega}} \quad (20)$$

式 (20) の分子と分母をそれぞれ $A(\omega)$, $B(\omega)$ とすれば, 式 (2) と式 (5) の平坦条件から,

$$\left. \frac{\partial^i A(\omega)}{\partial \omega^i} \right|_{\omega=\omega_{p0}} = \left. \frac{\partial^i B(\omega)}{\partial \omega^i} \right|_{\omega=\omega_{p0}} \quad (21)$$

が得られ,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N a_n (n - \tau_0)^i e^{-j\{(n-\tau_0)\omega_{p0} - \theta_0\}} \\ &= \sum_{m=0}^M b_m m^i e^{-jm\omega_{p0}} \end{aligned} \quad (22)$$

となる。ただし, $i = 0, 1, \dots, K-1$ である。実部と虚部に分けると, $2K$ 個の線形方程式が得られる。

4.2 指定された周波数点での零点配置

図 2 のように, 二つの阻止域に $J = N + M + 1 - 2K$ 個の零点を等間隔に配置する。ただし, J が偶数の場合, $L = \frac{J}{2}$ とし, $\hat{\omega}_0 \neq 0$ かつ $\hat{\omega}_{L-1} \neq \pi$ とする。一方, J が奇数の場合, $L = \frac{J+1}{2}$ とし, $\hat{\omega}_0 = 0$ あるいは $\hat{\omega}_{L-1} = \pi$ のどちらかの一方を選ぶ。よって, 低域通過フィルタの場合と同様に, 式 (13) そして式 (14) が得られる。 J が偶数の場合, 式 (14) の数は実部と虚部合わせて $2L = J$ となる。また, J が奇数の場合, $\hat{\omega}_0 = 0$ あるいは $\hat{\omega}_{L-1} = \pi$ であるので, 式 (14) の数は実部が L 個, 虚部が $L-1$ 個で $2L-1 = J$ となる。したがって, 式 (14) と式 (22) を合わせた $N + M + 1$

個の線形方程式を解くことにより, フィルタ係数が得られる。そして, 得られたフィルタ係数から誤差関数を計算し, 極値周波数点 ω_l とその位相 $\theta(\omega_l)$ を求める。しかし, 図 2 のように, J が偶数の場合は $L+2$ 個, 奇数の場合は $L+1$ 個の極値周波数点が生じる。そこで, J が偶数の場合は $\omega = 0$ と $\omega = \pi$ の極値周波数点の中から誤差が小さい方を削除し, 残りの $L+1$ 個の極値周波数点を選ぶ。また, J が奇数の場合は, $\omega = 0, \pi$ 以外の L 個の極値周波数点を選ぶ。

4.3 Remez アルゴリズムによる定式化

得られた極値周波数点において誤差関数 $E(\omega)$ の振幅が等しくなるよう定式化し, 式 (16) を得る。前述した極値周波数点の選び方により, 式 (16) の数は $J+1$ 個となる。したがって, 設計問題を式 (18) の固有値問題に定式化することができ, 反復処理により等リプル特性を達成できる。また, 帯域通過フィルタの設計アルゴリズムは 3.4 に述べたものと同様である。

5. 帯域阻止フィルタの設計

ここでは, 帯域阻止フィルタについて考える。帯域阻止フィルタの所望周波数特性は次式である。

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j(\tau_0\omega)} & (0 \leq \omega \leq \omega_{p1}) \\ 0 & (\omega_{s1} \leq \omega \leq \omega_{s2}) \\ e^{-j(\tau_1\omega + \theta_1)} & (\omega_{p2} \leq \omega \leq \pi) \end{cases} \quad (23)$$

ここで, ω_{p1} , ω_{p2} , ω_{s1} , ω_{s2} はそれぞれ通過域と阻止域端周波数, τ_0 , τ_1 は第 1 と第 2 通過域での所望群遅延, θ_1 は第 2 通過域での位相オフセットである。フィルタ係数が実数であるため, $\omega = \pi$ における位相は, $\tau_1\pi + \theta_1 = k_p\pi$ (k_p : 整数) でなければならない。

5.1 通過域の平坦条件

帯域阻止フィルタの場合, 通過域が二つある。第 1 通過域では, $\omega_{p0} = 0$ で, 平坦度が K_1 である。よって, 低域通過フィルタと同様に, 式 (12) の K_1 個の式が得られる。第 2 通過域では, $\omega_{p0} = \pi$ で, 平坦度が K_2 である。同様に $\hat{H}(e^{j\omega})$ を以下のように構成する。

$$\hat{H}(e^{j\omega}) = \frac{H(e^{j\omega})}{e^{-j(\tau_1\omega + \theta_1)}} = \frac{\sum_{n=0}^N a_n e^{-j\{(n-\tau_1)\omega - \theta_1\}}}{\sum_{m=0}^M b_m e^{-jm\omega}} \quad (24)$$

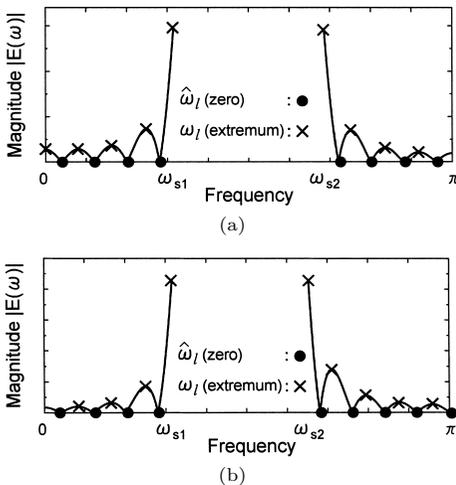


図 2 帯域通過フィルタの初期零点の配置
(a) J が偶数の場合, (b) J が奇数の場合

Fig. 2 Location of initial zeros for bandpass filters.
(a) even J , (b) odd J .

したがって、式 (24) より、 $\omega_{p0} = \pi$ における平坦条件から次式が得られる。

$$\sum_{n=0}^N a_n (n - \tau_1)^i (-1)^n (-1)^{k_p} = \sum_{m=0}^M b_m m^i (-1)^m \quad (25)$$

ただし、 $i = 0, 1, \dots, K_2 - 1$ である。

5.2 指定された周波数点での零点配置

これまでと同様に、阻止域に $J = N + M + 1 - K_1 - K_2$ 個の零点を配置する。ここで J は奇数とする必要があり、 $L = \frac{J-1}{2}$ とする。まず、一つの零点を z 平面上の原点に配置する。すなわち、 $a_N = 0$ とする。そして、 L 個の零点を阻止域に等間隔に配置する。よって、 $\omega = 0$ と π における平坦条件から導出された方程式と初期零点からの方程式の数が $N + M$ となるため、それらの線形方程式を解くことにより、初期フィルタ係数を得ることができる。そして、得られた $L + 1$ 個の極値周波数点 ω_l と位相 $\theta(\omega_l)$ を求める。

5.3 複素 Remez アルゴリズムによる定式化

以上で得られた $L + 1$ 個の極値周波数点において、誤差関数 $E(\omega)$ の振幅が等しくなるように定式化することにより、式 (18) のような一般化固有値問題に帰着できる。また、設計アルゴリズムも 3.4 に述べたものと同様である。

6. 設計例

[設計例 1] 設計仕様として、 $N = 12, M = 5, K = 10, \omega_s = 0.5\pi$ を与え、 $\tau_0 = 12.0$ としたときの IIR 低域通過フィルタを設計した。8 回の反復計算で収束した。得られたフィルタの振幅特性を図 3 に実線で示し、 $\omega = 0$ において平坦、阻止域において等リプル特性が得られた。同じ仕様の FIR フィルタの場合は、24 次以上が必要である。更に、群遅延を変化させ、 $\tau_0 = 10.2, 13.8$ と与えたときのフィルタの振幅特性もそれぞれ破線と点線で示した。図 4 にそれぞれの群遅延特性を示した。 $\omega = 0$ において群遅延特性が平坦であることが分かる。図 5 に示した $\tau_0 = 12.0$ のフィルタの極零点配置から、安定なフィルタが得られたことが分かる。また、ほかのフィルタも同様に安定であった。フィルタの安定性を調査するため、 $\tau_0 = 0.0, 0.1, \dots, 20.0$ と与えた場合の極配置を図 6 に示す。図 6 において、黒丸は $\tau_0 = 0, 7.2, 20$ 以外の場合の極を表す。この結果から、このフィルタは $\tau_0 \geq 7.2$ で安定となった。よって、文献 [3] に示さ

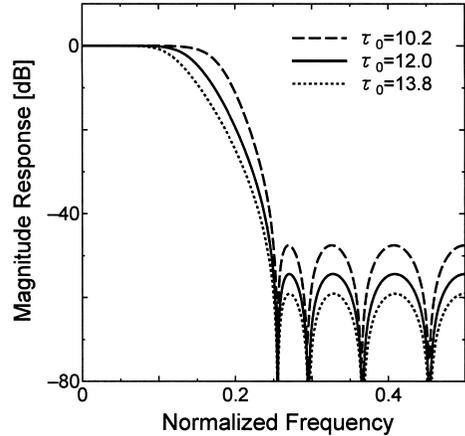


図 3 設計例 1 の低域通過フィルタの振幅特性
Fig. 3 Magnitude responses of lowpass filters in Example 1.

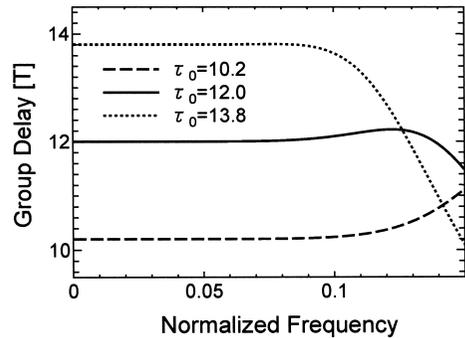


図 4 設計例 1 の低域通過フィルタの群遅延特性
Fig. 4 Group delays of lowpass filters in Example 1.

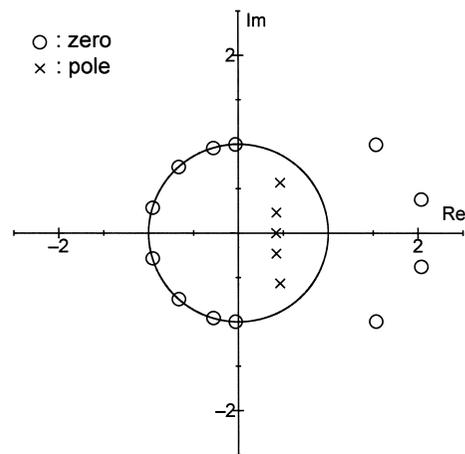


図 5 設計例 1 の低域通過フィルタの極零点配置
Fig. 5 Pole-zero location of lowpass filter in Example 1.

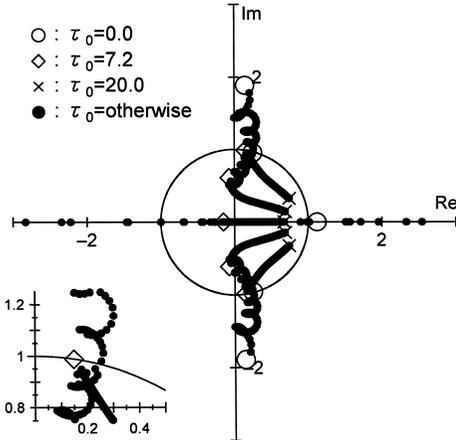


図6 設計例1の低域通過フィルタの極配置(極の変化)
Fig. 6 Pole location of lowpass filters in Example 1. (variation of poles)

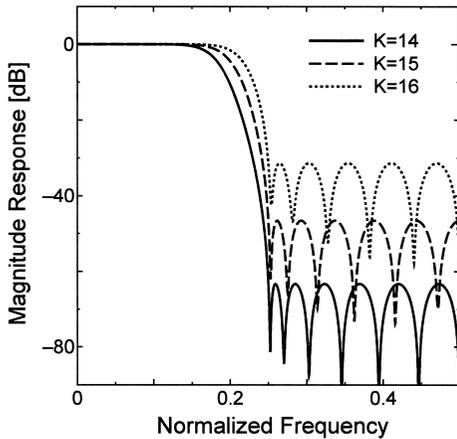


図7 設計例2の低域通過フィルタの振幅特性
Fig. 7 Magnitude responses of lowpass filters in Example 2.

れたように、IIR フィルタが安定となるためには、一定値以上の群遅延が必要であることが分かる。フィルタが安定となる群遅延の最小値は分子と分母の次数にほぼ比例するが、平坦度と阻止域幅の影響もあるため、更なる調査が必要である。

[設計例2] 設計仕様として、 $N = 20, M = 6, \tau_0 = 17, \omega_s = 0.5\pi$ を与え、 $K = 14$ としたときの IIR 低域通過フィルタを設計した。7 回の反復計算で収束した。得られたフィルタの振幅特性を図 7 に実線で示した。加えて、平坦度を変化させ、 $K = 15, 16$ と与えて設計したフィルタの振幅特性もそれぞれ破線及び点線で示した。平坦度の増加に伴い、阻止域減

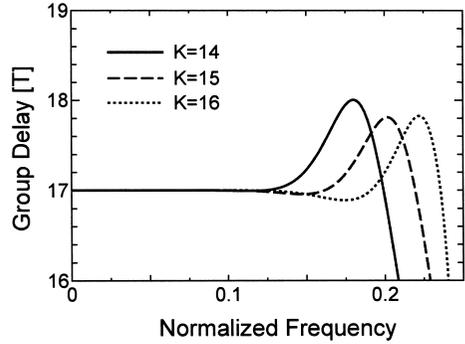


図8 設計例2の低域通過フィルタの群遅延特性
Fig. 8 Group delays of lowpass filters in Example 2.

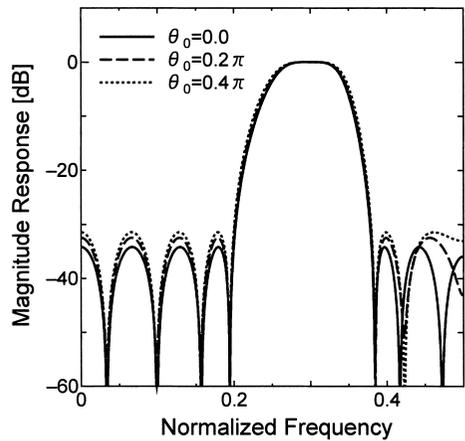


図9 設計例3の帯域通過フィルタの振幅特性
Fig. 9 Magnitude responses of bandpass filters in Example 3.

衰量が減少していることが分かる。また、図 8 にそれぞれの群遅延特性を示した。通過域の平坦度 K によって、群遅延特性も変化していることが分かる。

[設計例3] 設計仕様として、 $N = 17, M = 4, K = 4, \omega_{p0} = 0.60\pi, \omega_{s1} = 0.40\pi, \omega_{s2} = 0.76\pi, \tau_0 = 13.5, \theta_0 = 0.0$ を与えたときの IIR 帯域通過フィルタを設計した。11 回の反復計算で収束した。得られたフィルタの振幅特性を図 9 に実線で示した。加えて、位相オフセットを変化させ、 $\theta_0 = 0.2\pi, \theta_0 = 0.4\pi$ と与えて設計したフィルタの振幅特性もそれぞれ破線及び点線で示した。同様に、通過域平坦と阻止域等リプル振幅特性が得られたことが分かる。また、図 10 にそれぞれの場合の群遅延特性及び位相特性を示した。 $\omega = \omega_{p0}$ において、指定された位相オフセットを有していることが分かる。

[設計例 4] 設計仕様として, $N = 14, M = 4, K_1 = 4, K_2 = 4, \omega_{s1} = 0.3\pi, \omega_{s2} = 0.7\pi, \tau_0 = 11.6, \tau_1 = 10.2, \theta_1 = 0.8\pi$ を与えたときの IIR 帯域阻止フィルタを設計した. 6 回の反復計算

で収束した. 得られたフィルタの振幅特性を図 11 に, 群遅延特性を図 12 に実線で示した. 加えて, それぞれの平坦度と群遅延を変化させ, $K_1 = 2, K_2 = 6, \tau_0 = 9.6, \tau_1 = 12.2$, 及び $K_1 = 6, K_2 = 2, \tau_0 = 13.6, \tau_1 = 8.2$ を与えて設計したフィルタの振幅特性と群遅延特性もそれぞれ破線及び点線で示した.

7. む す び

本論文では, 通過域に平坦群遅延特性を有する通過域平坦阻止域等リプル IIR フィルタの一設計法を提案した. 最初に通過域の平坦条件から導出した線形方程式と, 阻止域に零点を配置するための方程式から, 通過域に平坦特性を有する IIR フィルタが設計できることを示した. 次に, 阻止域に零点を等間隔に配置して得られたフィルタ係数を初期値とし, Remez アルゴリズムを用いて, フィルタの設計問題を一般化固有値問題の形で定式化した. この固有値問題を解いて, フィルタ係数が得られる. また, 固有値問題を反復処理することにより, 阻止域での等リプル振幅特性を達成することができる. 最後に, 本設計法を用いて低域通過, 帯域通過と帯域阻止フィルタを設計し, 本設計法の有効性を示した. また, 本設計法は FIR フィルタも簡単に設計することができる.

文 献

- [1] B.A. Sheno, Magnitude and Delay Approximation of 1-D and 2-D Digital Filters, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1999.
- [2] 武部 幹, “振幅, 遅延同時平坦伝送関数,” 信学論 (A), vol.J54-A, no.1, pp.55-61, Jan. 1971.
- [3] J.P. Thiran, “Recursive digital filters with maximally flat group delay,” IEEE Trans. Circuit Theory, vol.CT-18, no.6, pp.659-664, Nov. 1971.
- [4] S. Darlington, “Filters with Chebyshev stopbands, flat passbands, and impulse responses of finite duration,” IEEE Trans. Circuits Syst., vol.CAS-25, no.12, pp.966-975, Dec. 1978.
- [5] 西川 清, 武部 幹, “通過域振幅平坦且つ遅延最大平坦で阻止域準等リプル減衰特性の IIR 形低域デジタルフィルタ,” 信学論 (A), vol.J64-A, no.10, pp.819-826, Oct. 1981.
- [6] P.P. Vaidyanathan, “Optimal design of linear phase FIR digital filters with very flat passbands and equiripple stopbands,” IEEE Trans. Circuits Syst., vol.CAS-32, no.9, pp.904-917, Sept. 1985.
- [7] T.I. Laakso, V. Valimaki, M. Karjalainen, and U.K. Laine, “Splitting the unit delay,” IEEE Signal Process. Mag., vol.13, no.1, pp.30-60, Jan. 1996.
- [8] X. Zhang and H. Iwakura, “Design of IIR digital filters based on eigenvalue problem,” IEEE Trans. Sig-

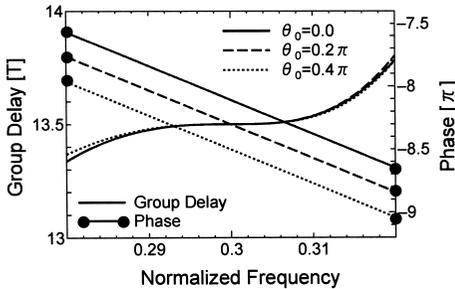


図 10 設計例 3 の帯域通過フィルタの群遅延特性と位相特性
Fig. 10 Group delays and phases of bandpass filters in Example 3.

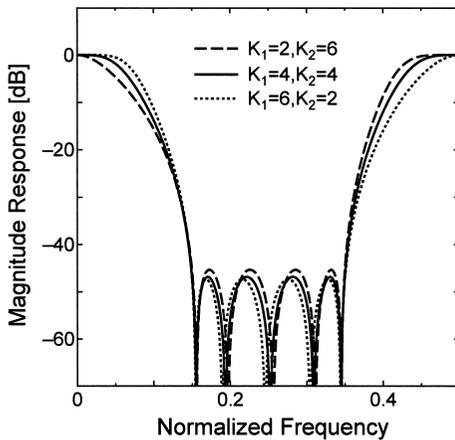


図 11 設計例 4 の帯域阻止フィルタの振幅特性
Fig. 11 Magnitude responses of bandstop filters in Example 4.

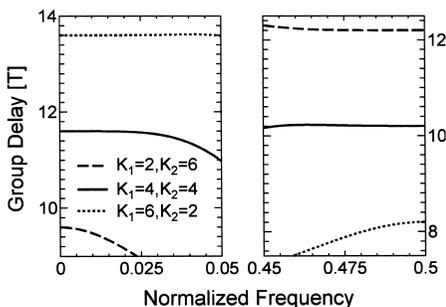


図 12 設計例 4 の帯域阻止フィルタの群遅延特性
Fig. 12 Group delays of bandstop filters in Example 4.

- nal Process., vol.44, no.6, pp.1325–1333, June 1996.
- [9] I.W. Selesnick and C.S. Burrus, “Generalized digital Butterworth filter design,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol.46, no.6, pp.1688–1694, June 1996.
- [10] I.W. Selesnick and C.S. Burrus, “Exchange algorithms for the design of linear phase FIR filters and differentiators having flat monotonic passbands and equiripple stopbands,” *IEEE Trans. Circuits Syst. II, Analog Digit. Signal Process.*, vol.43, no.9, pp.671–675, Sept. 1996.
- [11] R. Hegde and B.A. Shenoi, “Magnitude approximation of digital filters with specified degrees of flatness and constant group delay characteristics,” *IEEE Trans. Circuits Syst. II, Analog Digit. Signal Process.*, vol.45, no.11, pp.1476–1486, Nov. 1998.
- [12] 張 熙, 吉川敏則, “通過域平坦阻止域等リプル特性を有する IIR デジタルフィルタの設計,” *信学論 (A)*, vol.J82-A, no.3, pp.317–324, March 1999.
- [13] X. Zhang, K. Suzuki, and T. Yoshikawa, “Complex Chebyshev approximation for IIR digital filters based on eigenvalue problem,” *IEEE Trans. Circuits Syst. II, Analog Digit. Signal Process.*, vol.47, no.12, pp.1429–1436, Dec. 2000.
- [14] 竹内良介, 張 熙, 吉川敏則, 武井由智, “近似的直線位相特性を有するチェビシェフ型 IIR フィルタの設計,” *信学論 (A)*, vol.J86-A, no.4, pp.364–372, April 2003.

付 録

式 (8), (9) と式 (10) の等価性の証明

$\hat{H}(e^{j\omega})$ はその振幅 $|\hat{H}(e^{j\omega})|$ と位相 $\hat{\theta}(\omega)$ を用いて以下のように表される .

$$\hat{H}(e^{j\omega}) = |\hat{H}(e^{j\omega})|e^{j\hat{\theta}(\omega)} \quad (\text{A}\cdot 1)$$

よって, $\hat{H}(e^{j\omega_{p0}}) = 1$ は振幅 $|\hat{H}(e^{j\omega_{p0}})| = 1$, 位相 $\hat{\theta}(\omega_{p0}) = 0$ と等価である . また, その一次微分は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{H}(e^{j\omega})}{\partial \omega} &= \frac{\partial |\hat{H}(e^{j\omega})|}{\partial \omega} e^{j\hat{\theta}(\omega)} + j|\hat{H}(e^{j\omega})|e^{j\hat{\theta}(\omega)} \frac{\partial \hat{\theta}(\omega)}{\partial \omega} \\ & \quad (\text{A}\cdot 2) \end{aligned}$$

となる . $|\hat{H}(e^{j\omega_{p0}})| = 1$ と $\hat{\theta}(\omega_{p0}) = 0$ のため,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{H}(e^{j\omega})}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_{p0}} &= \frac{\partial |\hat{H}(e^{j\omega})|}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_{p0}} + j \frac{\partial \hat{\theta}(\omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_{p0}} \\ & \quad (\text{A}\cdot 3) \end{aligned}$$

よって, $\frac{\partial \hat{H}(e^{j\omega})}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_{p0}} = 0$ は $\frac{\partial |\hat{H}(e^{j\omega})|}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_{p0}} = 0$,

$\frac{\partial \hat{\theta}(\omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_{p0}} = 0$ と等価であることが分かる . 次に,

$$\frac{\partial^i \hat{H}(e^{j\omega})}{\partial \omega^i} \Big|_{\omega=\omega_{p0}} = \begin{cases} 1 & (i=0) \\ 0 & (i=1, 2, \dots, k-1) \end{cases} \quad (\text{A}\cdot 4)$$

が以下の式と等価であることを仮定する .

$$\frac{\partial^i |\hat{H}(e^{j\omega})|}{\partial \omega^i} \Big|_{\omega=\omega_{p0}} = \begin{cases} 1 & (i=0) \\ 0 & (i=1, 2, \dots, k-1) \end{cases} \quad (\text{A}\cdot 5)$$

$$\frac{\partial^i \hat{\theta}(\omega)}{\partial \omega^i} \Big|_{\omega=\omega_{p0}} = 0 \quad (i=0, 1, \dots, k-1) \quad (\text{A}\cdot 6)$$

$\hat{H}(e^{j\omega})$ の k 次微分は

$$\frac{\partial^k \hat{H}(e^{j\omega})}{\partial \omega^k} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{\partial^{k-i} |\hat{H}(e^{j\omega})|}{\partial \omega^{k-i}} \frac{\partial^i \{e^{j\hat{\theta}(\omega)}\}}{\partial \omega^i} \quad (\text{A}\cdot 7)$$

である . 式 (A.5) と (A.6) を用いて,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k \hat{H}(e^{j\omega})}{\partial \omega^k} \Big|_{\omega=\omega_{p0}} &= \frac{\partial^k |\hat{H}(e^{j\omega})|}{\partial \omega^k} \Big|_{\omega=\omega_{p0}} + \frac{\partial^k \{e^{j\hat{\theta}(\omega)}\}}{\partial \omega^k} \Big|_{\omega=\omega_{p0}} \\ &= \frac{\partial^k |\hat{H}(e^{j\omega})|}{\partial \omega^k} \Big|_{\omega=\omega_{p0}} + j \frac{\partial^k \hat{\theta}(\omega)}{\partial \omega^k} \Big|_{\omega=\omega_{p0}} \end{aligned} \quad (\text{A}\cdot 8)$$

となる . したがって, $\frac{\partial^k \hat{H}(e^{j\omega})}{\partial \omega^k} \Big|_{\omega=\omega_{p0}} = 0$ は

$\frac{\partial^k |\hat{H}(e^{j\omega})|}{\partial \omega^k} \Big|_{\omega=\omega_{p0}} = 0$, $\frac{\partial^k \hat{\theta}(\omega)}{\partial \omega^k} \Big|_{\omega=\omega_{p0}} = 0$ と等価で

ある . 群遅延と位相特性の関係は $\hat{\tau}(\omega) = -\frac{\partial \hat{\theta}(\omega)}{\partial \omega}$ であるため, また, 低域通過フィルタの場合, $\omega_{p0} = 0$ とおくと, 等価性の証明終了 .

(平成 18 年 7 月 19 日受付, 12 月 18 日再受付, 19 年 3 月 12 日最終原稿受付)



張 熙 (正員)

1984 中国南京航空航天大学電子工程系卒．1993 電通大大学院電子情報学専攻博士課程了．博士（工学）．1984 南京航空航天大学助手．1993 電通大助手．1996 長岡技科大助教授．現在，電通大准教授．2000 年 9 月～2001 年 6 月文科省在外研究員（米国マサチューセッツ工科大学）．1987 年度中国国家科技進歩賞三等賞，2002 年度第 4 回 LSI IP デザイン・アワードチャレンジ賞各受賞．2002 年 4 月～2004 年 3 月 IEEE Signal Processing Letters Associate Editor．デジタル信号処理，フィルタ設計理論，ウェーブレット，画像圧縮等の研究に従事．IEEE Senior Member．



相澤 正智 (学生員)

平 16 長岡技科大・電気電子情報卒．現在，同大大学院修士課程在学中．デジタル信号処理等の研究に従事．



吉川 敏則 (正員)

昭 46 東工大・電子卒．昭 51 同大大学院博士課程了．工博．埼玉大工学部助手，同大講師を経て，昭 58 より長岡技術科学大学助教授．現在，同大教授．デジタル信号処理，コンピュータのソフトウェア応用等の研究に従事．IEEE 会員．